TESIS- SM 142501

IMPLEMENTASI METODE *CRANK-NICOLSON* UNTUK MENDESKRIPSIKAN PERILAKU ASIMTOTIK HARGA SAHAM OPTIMAL DARI *AMERICAN CALL OPTION* DAN *STOCK LOAN*

NOVIANA TRI UTAMI
NRP 1214 201 015

Dosen Pembimbing:
Dr. Mahmud Yunus, M. Si.
Endah R. M. Putri., S.Si.,MT.,Ph.D.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2017

THESIS- SM 142501

IMPLEMENTATION CRANK-NICOLSON METHOD TO DISCRIBE OF ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OPTIMAL STOCK PRICE AMERICAN CALL OPTION AND STOCK LOAN

NOVIANA TRI UTAMI
NRP 1214 201 015

Supervisor:
Dr. Mahmud Yunus, M. Si.
Endah R. M. Putri., S.Si.,MT.,Ph.D.

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2017

IMPLEMENTASI METODE *CRANK-NICOLSON* UNTUK MENDESKRIPSIKAN PERILAKU ASIMTOTIK HARGA SAHAM OPTIMAL DARI *AMERICAN CALL OPTION* DAN *STOCK LOAN*

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
NOVIANA TRI UTAMI
NRP. 1214 201 015

Tanggal Ujian : 13 Januari 2017
Periode Wisuda : Maret 2017

Disetujui oleh :

Dr. Mahmud Yunus, M.Si. (Pembimbing I)
NIP 19620407 198703 1 005

Endah Rokhmati MP., S.Si, MT.,Ph.D. (Pembimbing II)
NIP 19761213 200212 2 001

Dr. Didik Khusnul Arif, S. Si., M. Si. (Penguji)
NIP 197330930 199702 1 001

Dr. Dra. Mardlijah, M.T. (Penguji)
NIP 19670114 199102 2 001

Dr. Dwi Ratna S, S.Si., M.T. (Penguji)
NIP 19690405 199403 2 003

An. Direktur Program Pascasarjana
Asisten Direktur

Prof. Dr. Ir. Tri Widjaja, M.Eng.
NIP. 19611021 198603 1 001

IMPLEMENTASI METODE *CRANK-NICOLSON* UNTUK MENDESKRIPSIKAN PERILAKU ASIMTOTIK HARGA SAHAM OPTIMAL DARI *AMERICAN CALL OPTION* DAN *STOCK LOAN*

Nama Mahasiswa	:	Noviana Tri Utami
NRP	:	1214 201 015
Pembimbing	:	1. Dr. Mahmud Yunus, M. Si.
		2. Endah R. M. Putri., S.Si.,MT.,Ph.D.

ABSTRAK

Stock loan adalah kontrak yang melibatkan dua pihak yaitu peminjam dan pemberi pinjaman dengan saham sebagai jaminan. Kontrak *stock loan* memiliki kemiripan mekanisme seperti pada kontrak *American call option* sehingga sistem persamaan *stock loan* dapat mengadopsi sistem persamaan *American call option*. Masalah *free boundary* yang terjadi pada keduanya menyebabkan solusi analitik sangat sulit atau bahkan tidak dapat diperoleh sehingga untuk memperoleh penyelesaian secara numerik menggunakan metode Crank-Nicolson. Meskipun memiliki mekanisme yang sama, keduanya memiliki perbedaan yaitu kemungkinan terjadi nilai yang negatif dari akumulasi suku bunga bank dan suku bunga pinjaman yang hanya terjadi pada *stock loan*. Oleh karena itu pada tesis ini diteliti perilaku asimtotik dari harga saham optimal pada *American call option* dan *stock loan* ketika jangka waktu perjanjian kontrak (*maturity date*) mendekati tak terhingga. Simulasi untuk penyelesaian secara numerik dilakukan dengan bantuan program Matlab. Gambaran perilaku asimtotik nilai optimal *American call option* dan *stock loan* diperoleh setelah melakukan simulasi.

Kata kunci: *American call option*, *stock loan*, Perilaku Asimtotik, *Crank-Nicolson*.

IMPLEMENTATION CRANK-NICOLSON METHOD TO DISCRIBE OF ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OPTIMAL STOCK PRICE AMERICAN CALL OPTION AND STOCK LOAN

Name	:	Noviana Tri Utami
NRP	:	1214 201 015
Supervisors	:	1. Dr. Mahmud Yunus, M. Si.
		2. Endah R. M. Putri., S.Si.,MT.,Ph.D.

ABSTRACT

Stock loan is a contract betwen two parties, they are the borrower and the lender with stock as the collateral. The Similarities mechanism of stock loan contract with American call option causes the free boundary problems in the stock loan which the analytic solutions are very difficult or even can not be obtained. But there is difference between them, that is the possibility of a negative value of the accumulated interest rate on the stock loan. Therefore, in this thesis is examined the assymthotic behavior the American call option and stock loan based optimum price when maturity date approaches infinity. Crank-Nicolson method used to determine numerical optimal price . simulated using the Matlab program. Deskription asymptotic behavior optimal value American call option and stock loan was obtained after simulation.

Keywords: American call option, stock loan, Asymptotic Behaviour, Crank-Nicolson.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada sang maha rahman dan rahim. Sebesar apapun suatu masalah adalah kecil dihadapanNya. Terimakasih kepada Allah, atas pertolonganNya sehingga penulis dapat menyelesaikan laporan tesis yang berjudul

" IMPLEMENTASI METODE *CRANK-NICOLSON* UNTUK MENDESKRIPSIKAN PERILAKU ASIMTOTIK HARGA SAHAM OPTIMAL DARI *AMERICAN CALL OPTION* DAN *STOCK LOAN* ",

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Pascasarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Atas bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, maka berbagai kendala dan hambatan selama mengerjakan tesis menjadi terasa indah dan menyenangkan untuk dilalui. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu terwujudnya laporan tesis ini, antara lain kepada:

1. Keluarga saya tercinta, atas segala dukungan, doa, cinta kasih dan kepercayaan.
2. Ibu Endah Rokhmati MP., S.Si, MT.,Ph.D. dan Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si. sebagai dosen pembimbing yang telah banyak membantu penulis dalam penyusunan tesis ini, baik dalam hal teknis maupun non teknis.
3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S. Si., M. Si., Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T., dan Ibu Dr. Dwi Ratna S, S.Si., M.T. sebagai dosen penguji atas saran yang telah diberikan untuk perbaikan tesis ini.
4. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si. Ketua Pasca Sarjana jurusan Matematika, Bapak dan Ibu dosen, staff dan karyawan di S2 Matematika ITS yang telah memberikan banyak bantuan kepada penulis.
5. Semua bapak dan Ibu guruku yang pernah mendidik saya.
6. Sahabat di keluarga besar S2 Matematika ITS angkatan 2014 yang telah memberi dukungan, semangat dan motivasi. Terucap terimakasih khususnya pada Bang Kiki Mustakim, Bang Madun, Mba Dewi, Bang Pandi, Hermei Lisa, Ardy Kempa, Ruzika, Risky Faundra, Riski Fauziyah, Farah, Mba Riza.
7. Adik-adik tingkat yang menemani dan membantu penyelesaian ini khususnya lena, Nurul, Danang, Habibi.
8. Keluarga besar SDN Ujung V Surabaya.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, semoga Allah SWT membalas kebaikan kepada semua pihak yang telah membantu penulis.

Penulis menyadari bahwa di dalam penulisan tesis ini masih banyak terdapat kekurangan karena keterbatasan penulis, untuk itu dengan segala kerendahan hati mengharap saran dan kritik demi perbaikan penulisan selanjutnya. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Aamiin.

Surabaya, Januari 2017

Penulis

DAFTAR ISI

Hal.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada sang maha rahman dan rahim. Sebesar apapun suatu masalah adalah kecil dihadapanNya. Terimakasih kepada Allah, atas pertolonganNya sehingga penulis dapat menyelesaikan laporan tesis yang berjudul

" IMPLEMENTASI METODE *CRANK-NICOLSON* UNTUK MENDESKRIPSIKAN PERILAKU ASIMTOTIK HARGA SAHAM OPTIMAL DARI *AMERICAN CALL OPTION* DAN *STOCK LOAN* ",

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Pascasarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Atas bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, maka berbagai kendala dan hambatan selama mengerjakan tesis menjadi terasa indah dan menyenangkan untuk dilalui. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu terwujudnya laporan tesis ini, antara lain kepada:

1. Keluarga saya tercinta, atas segala dukungan, doa, cinta kasih dan kepercayaan.
2. Ibu Endah Rokhmati MP., S.Si, MT.,Ph.D. dan Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si. sebagai dosen pembimbing yang telah banyak membantu penulis dalam penyusunan tesis ini, baik dalam hal teknis maupun non teknis.
3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S. Si., M. Si., Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T., dan Ibu Dr. Dwi Ratna S, S.Si., M.T. sebagai dosen penguji atas saran yang telah diberikan untuk perbaikan tesis ini.
4. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si. Ketua Pasca Sarjana jurusan Matematika, Bapak dan Ibu dosen, staff dan karyawan di S2 Matematika ITS yang telah memberikan banyak bantuan kepada penulis.
5. Semua bapak dan Ibu guruku yang pernah mendidik saya.
6. Sahabat di keluarga besar S2 Matematika ITS angkatan 2014 yang telah memberi dukungan, semangat dan motivasi. Terucap terimakasih khususnya pada Bang Kiki Mustakim, Bang Madun, Mba Dewi, Bang Pandi, Hermei Lisa, Ardy Kempa, Ruzika, Risky Faundra, Riski Fauziyah, Farah, Mba Riza.
7. Adik-adik tingkat yang menemani dan membantu penyelesaian ini khususnya lena, Nurul, Danang, Habibi.
8. Keluarga besar SDN Ujung V Surabaya.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, semoga Allah SWT membalas kebaikan kepada semua pihak yang telah membantu penulis.

Penulis menyadari bahwa di dalam penulisan tesis ini masih banyak terdapat kekurangan karena keterbatasan penulis, untuk itu dengan segala kerendahan hati mengharap saran dan kritik demi perbaikan penulisan selanjutnya. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Aamiin.

Surabaya, Januari 2017

Penulis

DAFTAR GAMBAR

Hal.

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini diuraikan hal-hal yang melatarbelakangi munculnya permasalahan dalam usulan penelitian ini. Permasalahan tersebut akan disusun ke dalam suatu rumusan masalah dan dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan. Adapun manfaat dari usulan penelitian diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Investasi merupakan salah satu pilihan seseorang untuk memperbanyak kekayaanya. Seseorang (*investor*) dapat menginvestasikan sejumlah kekayaan melalui produk finansial dengan harapan mendapatkan keutungan di masa mendatang. Berbagai macam produk finansial misalnya saham, ekuitas dan komoditi dapat dijadikan pilihan *investor* untuk menanamkan modalnya.

Ketika pemegang saham memerlukan sejumlah uang, dia bisa meminjam uang di bank maupun perusahaan swasta dengan saham sebagai jaminannya. Pinjaman dengan saham sebagai jaminan disebut dengan *stock loan*. Saham yang dipinjamkan dapat diambil kembali ketika peminjam mengembalikan pinjaman[15].

Mekanisme *stock loan* hampir sama seperti *American call option*[11]. Hanya saja pada kontrak *stock loan* melibatkan bunga pinjaman sehingga ada kemungkinan terjadi suku bunga akumulasi bernilai negatif. Hal ini yang membedakan antara *stock loan* dan *American call option*. Suku bunga negatif atau *negative interest rate* terjadi ketika suku bunga bank lebih rendah dari suku bunga pinjaman. Sehingga selisih antara suku bunga bank dengan suku bunga pinjaman bernilai negatif[4].

American option atau opsi gaya Amerika adalah kontrak yang memberikan hak (bukan kewajiban) kepada *holder* (pemegang) untuk melakukan *exercise* setiap saat dengan harga tertentu. Untuk menghitung nilai *American call option* digunakan persamaan differensial *Black-Scholes* dimana persamaan ini diperoleh dari kondisi pasar saham yang bergerak mengikuti *Geometric Brownian Motion*.

Berdasarkan kemiripan mekanisme kontrak antara *American call option* dan *stock loan*, penentuan nilai *stock loan* dengan menggunakan persamaan *Black-Scholes*. Oleh karena itu pada kontrak *stock loan* juga terdapat masalah *free boundary* sebagaimana terjadi pada *American call option*. Solusi analitik untuk masalah tersebut hingga saat ini belum didapatkan[5]. Alternatif yang bisa dilakukan adalah menggunakan metode numerik untuk mendapatkan nilai dari keduanya.

Menurut Bhowmik dalam papernya yang berjudul *"Fast and efficient numerical methods for an extended Black-Sholes model"* telah meneliti kecepatan dan efisiensi motode numerik untuk pengembangan model *Black-Scholes* yang berbentuk integral parsial diferensial. Dalam penelitian Bhowmik telah dibuktikan bahwa metode *Crank-Nicolson* memiliki keunggulan dalam akurasi dan stabilitas skema. Selain itu metode *Crank-Nicolson* lebih efisien dalam hal biaya komputasi dan biaya penyimpanan[1].

Pada penelitian ini dicari harga saham optimal *American call option* dan *stock loan* secara analitik dan secara numerik menggunakan *Finite Different Crank-Nicolson*. Solusi analitik digunakan untuk membandingkan apakah solusi numerik memiliki sifat yang sama yaitu konstan di suatu nilai menuju T tak hingga. Gambaran perilaku asimtotik harga saham optimal *American call option* dan *stock loan* diperoleh dari hasil simulasi numerik.

1.2 Rumusan Masalah

Berkaitan dengan latar belakang yang telah diuraikan di atas maka disusun suatu rumusan masalah yang dibahas dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana penyelesaian *American call option* dan *stock loan* secara numerik menggunakan metode *Finite Difference Crank-Nicolson*.

2. Bagaimana analisis nilai *American call option* dan *stock loan* dari hasil simulasi numerik.

3. Bagaimana perbandingan harga saham optimal yang diselesaikan secara analitik dan secara numerik menggunakan *Finite Difference Crank-Nicolson*.

1.3 Asumsi

Asumsi dalam tesis ini :

1. Dividen bernilai konstan.

2. Tingkat suku bunga bank konstan.

3. Tingkat suku bunga pinjaman konstan.

4. Besar pinjaman *stock loan* tumbuh secara eksponensial terhadap waktu.

1.4 Batasan masalah

Batasan masalah pada tesis ini :

1. Perbedaan perilaku asimtotik dari *American call option* dan *stock loan* ditinjau dari besarnya tingkat suku bunga pinjaman, tingkat suku bunga bank dan pembagian dividen.

2. *Lender* menahan dividen sebelum *borrower* mengembalikan pinjaman.

1.5 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam tesis ini :

1. Mendapatkan penyelesaian *American call option* dan *stock loan* secara numerik menggunakan metode *Crank-Nicolson*.

2. Mendapatkan analisis tentang penyelesaian *American call option* dan *stock loan* secara numerik.

3. Memperoleh perbandingan harga saham optimal yang diselesaikan secara analitik dan numerik menggunakan *Finite Different Crank-Nicolson*.

1.6 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Diperoleh informasi mengenai suatu produk keuangan derivatif yaitu *stock loan* sebagai alternatif memperoleh pinjaman dana.

2. Diperoleh suatu pengetahuan yang sangat berguna, baik bagi kalangan akademik maupun bagi masyarakat yang ingin berinvestasi menggunakan *American call option* ataupun *stock loan*

BAB II
KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Kajian Pustaka

Kajian mengenai *American call option* sudah banyak dilakukan oleh para peneliti sedangkan untuk *stock loan* penelitian yang ada masih terbatas. Berikut adalah paparan mengenai penelitian terdahulu yang terkait dengan topik yang akan dibahas dalam tesis ini.

Chiarella dan Ziogas pada papernya yang berjudul *"A Survey of the Integral Representation of American Option Prices"* meneliti nilai *American call option* terhadap waktu. Mereka merujuk pada representasi nilai *American call option* yang diberikan oleh Carr, Jarrow dan Myeni. Kemudian mencari solusinya menggunakan transformasi fourier dan metode numerik. Hasil yang di peroleh menyatakan bahwa solusi dengan metode numerik lebih menguntungkan[2].

Paper yang berjudul *"Mathematical analysis and numerical method for a PDE model of a sctock loan pricing problem"* yang di tulis Pascucci bersama kedua temannya yaitu Taboada dan Vasques telah membandingkan secara analitik dan numerik mengenai persamaan differensial untuk pembagian dividen dari *stock loan*. Dalam penelitian mereka pada awalnya tidak dapat memperoleh solusi secara analitik sehingga beralih pada solusi numerik[3].

Dalam paper Lu dan Putri yang berjudul *"Semi-analytic valuation of stock loans with finite maturity"*, mereka mengkontruksi *stock loan* menyerupai *American call option* dengan tiga cara pembayaran dividen yang berbeda kemudian mencari nilai *stock loan* secara semi analitik yaitu pendekatan secara analitik dan secara numerik pada Laplace *inversion*. Metode transformasi Laplace mereka gunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial *Black-Scholes*. Untuk membuktikan keakuratan metode semi analitik digunakan pebandinagn beberapa contoh hasil perhitungan secara numerik. Kesimpulannya metode semi analitik lebih efisien dan akurat dibandingkan metode binomial [4].

Mengenai cara pembayaran pinjaman *stock loan* disertai pembagian dividen di bahas dalam paper Dai dan Xu yang berjudul *"Optimal redeeming strategy of stock loans with finite maturity"*. Pinjaman *stock loan* dapat dikembalikan setiap saat sebelum jatuh tempo maupun pada saat jatuh tempo. Mereka menyajikan model penebusan *stock loan* dengan berbagai empat cara pembagian dividen yaitu dividen diperoleh *lender* sebelum peminjam melakukan pelunasan, dividen diinvestasikan kembali kemudian dikembalikan diberikan kepada peminjam pada saat melakukan pelunasan, dividen rutin diberikan pada peminjam dan akumulasi dividen akan diberikan kepada peminjam pada saat melakukan pelunasan. Mereka melakukan pendekatan analitik untuk menganalisis strategi penebusan yang optimal. Selain itu pendekatan numerik digunakan untuk menguji analisis mereka. Dari hasil analisis yang dibuktikan secara numerik dapat disimpulkan bahwa strategi pembagian dividen secara signifikan mempengaruhi harga *stock loan* dan strategi pelunasan optimal yang akan dipilih oleh peminjam.

2.2 Dasar Teori

2.2.1 Saham/Stock

Saham merupakan salah satu instrumen jual beli di pasar modal yang berwujud selembar kertas. Menurut IDX (*Indonesian Stock Exchange*) saham didefinisikan sebagai tanda penyertaan modal seseorang atau pihak (badan usaha) dalam suatu perusahaan atau perseroan terbatas. Dengan menyertakan modal tersebut, maka pihak tersebut memiliki klaim atas pendapatan perusahaan, klaim atas asset perusahaan, dan berhak hadir dalam Rapat Umum Pemegang Saham (RUPS)[16].

Investasi dengan membeli saham memiliki keuntungan yaitu memberikan keuntungan yang besarnya bergantung pada perkembangan perusahaan penerbit saham. Apabila perusahaan penerbit saham menghasilkan laba yang besar maka ada kemungkinan menikmati keuntungan yang besar pula. Sedangkan perusahaan penerbit saham memperoleh pinjaman modal dari investor pembeli hasam. Dengan demikian terdapat timbal balik yang saling menguntungkan antara investor dengan perusahaan penerbit saham.

Menurut jenisnya terdapat dua jenis saham yang dapat di keluarkan oleh sebuah perusahaan yaitu saham biasa dan saham preferen. Pemegang saham biasa adalah pemilik perusahaan. Mereka menerima dividen yang besar ketika perusahaan mendapatkan keuntungan namun mereka juga mengaggung resiko pada saat kondisi perusahaan tidak baik. Pemegang saham preferen memiliki hak yang lebih dibandingkan pemilik saham biasa. Pemegang saham preferen mendapatkan dividen lebih dahulu dibanding kan pemegang saham biasa.

2.2.2 Proses Stokastik

Himpunan barisan kejadian yang tidak dapat diramalkan disebut sebagai proses stokastik. Beberapa contoh kejadian stokastik misalnya banyaknya angka kematian di suatu kota, lama antrian pembayaran disebuah kasir dan peramalan cuaca di suatu daerah. Perubahan harga saham dalam jangka waktu tertentu tidak dapat ditentukan nilainya, oleh sebab itu perubahan harga saham juga dapat dikatakan sebagai proses stokastik.

Misalnya pada perdagangan saham dengan *step* $t = 1, 2,$ dimana pada saat harga saham naik dilambangkan u dan harga saham turun dilambangkan dengan d. Himpunan kejadian yang mungkin terjadi yaitu $\Omega = \omega_1 = (u, u), \omega_2 = (u, d), \omega_3 = (d, u), \omega_4 = (d, d)$. Diberikan $A = \omega_1, \omega_2$ yang mana kejadian pada saat $t = 1$ harga saham naik. $F_1 = \emptyset, \Omega, A,$Ā dan $F_1 = 2^{\Omega}$ berisi 16 himpunan bagian dari Ω

Secara matematis proses stokastik dapat dikatakan sebagai koleksi himpunan variabel acak dalam bentuk $(X(t), t \in T)$. T adalah himpunan yang beranggotakan waktu (t=0,1,2,...,T). $X(t)$ adalah kejadian yang tidak pasti pada saat t , sehingga $X(t)$ dapat dikatakan sebagai variabel acak pada (Ω, F_t).

2.2.3 Brownian Motion

Brownian motion (W_t, t_0) atau juga yang disebut *Wiener process* adalah proses stokastik yang memenuhi kondisi :

1. W_t adalah lintasan kontinu dan $W_0 = 0$.
2. Berdistribusi normal untuk dua kejadian antara s dan $s + t$ *Brownian motion* adalah dengan W_s dan W_{s+t} rata-rata nol dan varians t.
3. Ukuran dari setiap step baik *up* maupun *down* adalah sama yaitu $\frac{1}{\sqrt{n}}$ dengan probabilitas yang sama.

2.2.4 Persamaan Black-Scholes

Persamaan *Black-Scholes* resmi dipublikasikan oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973. Persamaan *Black-Scholes* digunakan untuk menentukan nilai *option* menggunakan solusi numerik. Perubahan harga saham bergerak secara acak seperti gerak partikel sehingga perubahan harga saham dapat dianalogikan mengikuti *Geometric Brownian motion* (GBM)yaitu:

$$dS = \mu S dt + S\sigma dW_t. \tag{2.1}$$

Harga saham dilambangkan dalam S sehingga perubahan harga saham dapat dinyatakan dalam dS. Perubahan harga saham dipengaruhi oleh dua faktor yaitu faktor internal dan faktor eksternal. Faktor internal adalah ekspektasi (μ) kenaikan harga saham dalam selang waktu yang relatif singkat (dt). Sedangkan faktor eksternal adalah tingkat volatilitas (σ) dari harga saham (S) dalam jangka waktu (dt) yang mengikuti *wienner* proses (dW_t).

Portofolio (kekayaan) di awal investasi dipengaruhi nilai option dan sejumlah saham . Investor harus mengeluarkan uang untuk melakukan kontrak *option* sehingga pembentukan portofolio pada awal investasi dapat dituliskan:

$$\Pi = V - \Delta S. \tag{2.2}$$

Perubahan portofolio terhadap waktu dinyatakan sebagai berikut:

$$d\Pi = dV - \Delta dS \tag{2.3}$$

Diberikan deret Taylor dua variabel :

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}dt.$$

,

Substitusikan Persamaan (2.1) pada deret Taylor dua variabel sehingga diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} dV(S,t) =& \frac{\partial V}{\partial S}\left[(\mu S dt + S\sigma dW_t\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left[\mu S dt + S\sigma dW_t\right]^2 \\ &+ \frac{\partial V}{\partial t}dt, \\ =& \mu S dt \frac{\partial V}{\partial S} + (\sigma S dW_t)\frac{\partial V}{dS} + \frac{1}{2}\mu^2 S^2 dt^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\ &+ \mu S dt \sigma S dW_t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}S^2\sigma^2(dW_t)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Terdapat kondisi stokastik pada Persamaan 2.4. Menurut Jiang [7] untuk mengubah kondisi stokastik menjadi kondisi deterministik diperlukan varians *random walk* :

$$dW_t^2 = dt \tag{2.5}$$

$$dW_t dt = 0 \tag{2.6}$$

$$dt^2 = 0. \tag{2.7}$$

Substitusikan (2.5), (2.6) dan (2.7) pada Persamaan 2.4 sehingga diperoleh:

$$dV(S,t) = (\sigma S dW_t)\frac{\partial V}{\partial S} + \left[\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt. \tag{2.8}$$

Perubahan portofolio karena $dV(S,t)$ pada Persamaan 2.8 :

$$d\Pi = (\sigma S dW_t)\frac{\partial V}{\partial S} + \left[\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] - \Delta dS. \tag{2.9}$$

Masih terdapat kondisi stokastik pada Persamaan 2.8. Untuk menghilangkan kondisi stokastik tersebut ditentukan:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \tag{2.10}$$

Persamaan 2.10 disubstitusikan pada Persamaan 2.9 sehingga diperoleh:

$$d\Pi = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt. \tag{2.11}$$

Investasi menggunakan prinsip bebas resiko seperti menyimpan kekayaan di bank:

$$\Pi = \Pi_{bank}$$

Jika disumsikan tingkat suku bunga bebas resiko adalah r maka perubahan portofolio selama investasi :

$$d\Pi = \Pi r dt. \tag{2.12}$$

Substitusikan Persamaan 2.11 dan 2.2 pada Persamaan 2.12:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt = r\left[V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right] dt,$$

Sehingga diperoleh persamaan *Black-Scholes*:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{2.13}$$

dengan:

V = nilai *call option* dalam satuan mata uang
S = harga saham optimal dalam satuan mata uang
r = *interest rate* atau suku bunga bank dalam satuan persen
t = waktu *exercise* dalam satuan hari, bulan atau tahun
σ = *volatilitas* saham.

Pada Persamaan *Black-Scholes* (2.13) nampak bahwa nilai *option* dipengaruhi oleh harga saham saat ini, waktu, volatilitas harga saham, dan tingkat suku bunga bebas resiko.

2.2.5 Option

Option adalah kontrak yang memberikan hak (bukan kewajiban) kepada pemegang (*holder*) untuk membeli atau menjual aset yang berupa saham pada jangka waktu dan harga tertentu. *Option* merupakan derivatif, turunan keuangan dimana nilainya diturunkan dari *underlying assets* yang mendasarinya. Seorang pemegang berhak menjual opsi (*put option*) ataupun membeli opsi (*call option*). Menurut Willmott, *put option* adalah hak untuk menjual saham yang telah di sepakati pada waktu tertentu di masa mendatang sedangkan *call option* hak untuk membeli saham yang telah di sepakati pada waktu tertentu di masa mendatang[14].

Pada pasar modal *option* gaya Amerika atau *American option* lebih digemari karena *American option* memiliki kelebihan yaitu *holder* dapat melakukan *exercise* setiap saat sampai jatuh tempo yang telah disepakati (*maturity date*).
Istilah-istilah dalam *option* :

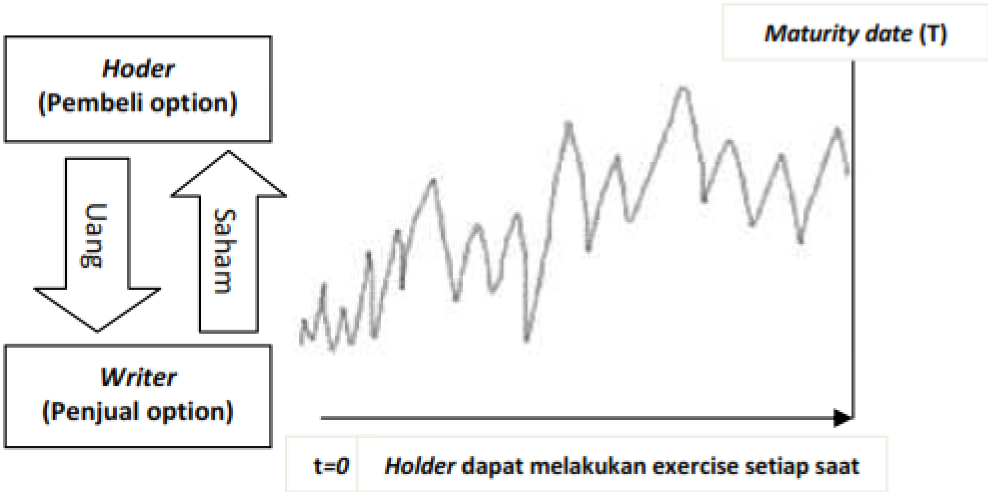
1. *Strike priece* : harga pada saat *option* di*exercise*.
2. *Stok price*: harga saham di pasar.
3. *Exercise* : *option* dilaksanakan.
4. Maturity date : tanggal jatuh tempo perjanjian
5. *Expiry Date*: tanggal dilakukan *exercise*.
6. *Option Premium* :biaya pembelian *option*, yang dibayarkan untuk awal kontrak. Besarnya premi sesuai dengan banyak lembar.
7. *Writer* : Pihak yang mengeluarkan kontrak.
8. *Underlying asset* : Aset yang mendasari misalnya saham, komoditas, mata uang dan *index* .

9. *Return* : tingkat keuntungan yang diperoleh pemegang saham

10. *Volatility* : tingkat variabilitas dari suatu *return* untuk memprediksi perubahan harga saham.

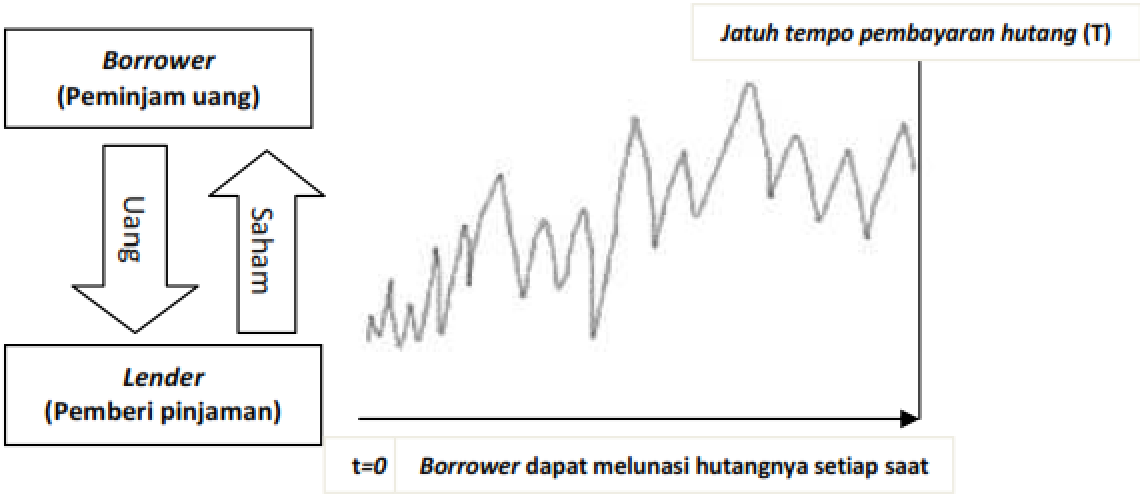
2.2.6 Mekanisme *American Call Option* dan *Stock Loan*

American call option adalah kontrak yang memberikan hak kepada *holder* untuk membeli saham setiap setiap saat selama jangka waktu yang sudah disepakati. Pada *American call option*, *holder* mengeluarkan uang untuk membeli saham dari *writer* dan *holder* memiliki hak untuk melakukan *execise* setiap saat. Mekannisme kontrak *American call option* ditunjukkan oleh Gambar2.1



Gambar 2.1: Mekanisme *American call option*

Stock loan adalah kontrak yang dilakukan *borrower* dan *lender*. *Lender* sebagai pemilik saham memperoleh pinjaman dari *lender* dengan saham sebagai jaminannya. Dalam hal ini *Borrower* tidak kehilangan hak kepemilikan atas sahamnya. *Borrower* dapat melakukan pelunasan satiap saat meskipun jatuh tempo pelunasan belum berakhir sama halnya seperti *holder* pada kontrak *American call option* yang berhak melakukan *exercise* setiap saat. Pada saat pelunasan *lender* memperoleh uang pengembalian dari *borrower* sedangkan *borrower* memperoleh sahamnya kembali. *Borrower* pada kontrak *Stock loan* dianggap sebagai *holder* pada kontrak *American call option* yang memiliki hak melakukan *exercise* setiap saat. Dengan demikian mekanisme *stock loan* dapat dikatakan mirip dengan mekanisme *American call option* . Skema kontrak *stock loan* ketika terjadi pelunasan ditunjukkan oleh Gambar 2.3.



Gambar 2.2: Mekanisme *Stock Loan*

2.2.7 Dividen

Terdapat beberapa perusahaan penerbit saham mengeluarkan dividen setiap tahunnya. Dividen adalah pembagian keuntungan yang diperoleh perusahaan penerbit saham kepada pemegang saham. Jika *investor* ingin mendapatkan dividen maka *investor* harus memiliki saham sehingga *investor* mendapatkan pengakuan. Dividen yang diberikan bisa berupa uang tunai maupun diberikan dalam bentuk saham.

Ketika pembagian dividen diumumkan oleh perusahaan penerbit saham biasanya banyak *investor* yang ingin membeli saham dengan harapan memperoleh keuntungan dari pembagian dividen. Tetapi investor pemegang saham tidak banyak yang melepas sahamnya. Kondisi ini menyebabkan kenaikan harga saham.

Untuk menentukan nilai *option* yang disertai dividen digunakan *Black-scholes* sebagai berrikut :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

V	=	nilai *option*
S	=	harga saham dalam satuan mata uang
t	=	waktu melakukan exercise
r	=	tingkat suku bunga bank dalam persen
δ	=	besar dividen dalam bentuk persen.

Nilai *option* dilambangkan V didalamnya terdapat variable S dan t. Pada keadaan sebenarnya besar suku bunga bank harus lebih besar daripada besarnya pembagian dividen sehingga selisih suku bunga bank dengan dividen bernilai positif.

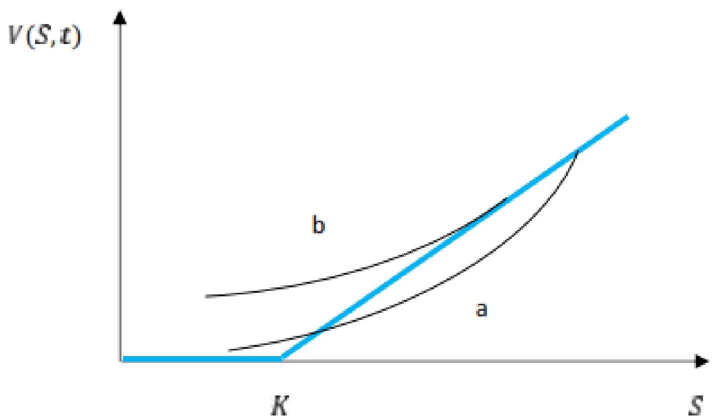
2.2.8 *American Call Option*

American call option adalah kontrak yang memberikan hak (bukan kewajiban) kepada *holder* untuk membeli saham kapanpun selama masa kontrak berlaku. *Exercise* pada *call option* dilakukan bisa kapan saja tentunya ketika harga beli saham (*strike priece*) lebih kecil dibandingkan harga saham di pasar modal.

Besarnya keuntungan yang diperoleh *investor* dari kontrak *American call option* sebesar selisih harga saham di pasar (S) dan *strike price* (K) yang telah disepa-kati. Keuntungan yang diperoleh disebut sebagai *payoff*, fungsi *payoff* dari *American call option* dituliskan:

$$payoff = \max(S - K, 0)$$

Holder dapat melakukan *exercise* ketika harga saham optimal $S = S_f$ dengan keuntungan sebesar $S_f - K$. Diberikan nilai *American call option* yaitu $C(S,t) \geq \max(S - K, 0)$. Sebuah *slope* menyinggung payoff dengan gradien kemiringan 1. Terdapat tiga kemungkinan $\frac{\partial V}{\partial S}$:



Gambar 2.3: *Exercise price*

- $\dfrac{\partial V}{\partial S}$<1 ditunjukkan pada Gambar 2.3(a). *Slope* yang merepresentasikan nilai *call option* berada di bawah *payoff*, terjadi kontradiksi dengan $C(S,t) \geq \max(S - K, 0)$. Pada saat ini harga saham tidak mencapai optimal sehingga *holder* tidak memperoleh keuntungan optimal.

- $\dfrac{\partial V}{\partial S} > 1$ ditunjukkan pada Gambar 2.3(b). *Slope* yang merepresentasikan nilai *call option* berada di atas *payoff*. Pada saat ini *holder* memperoleh keuntungan optimal. Kemungkinan yang terjadi *holder* melakukan exercise membeli saham kemudian menjual lagi pada saat yang bersamaan dengan tujuan memperoleh keuntungan instan. Hal ini bertentangan dengan prinsip *free arbitrage*.
- $\dfrac{\partial V}{\partial S} = 1$. *Slope* yang merepresentasikan nilai *call option* berada pada *payoff* $C(S,t) = \max(S-K,0)$ sehingga harga saham optimal S_f terletak pada $\dfrac{\partial V}{\partial S} = 1$.

Menurut Jiang[7], definisi *American call option* dituliskan sebagai sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\ V(0,t) = 0 \\ V(S,T) = \max(S-K,0) \\ V(S_f,t) = S_f(t) - K \\ \dfrac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = 1, \end{cases} \tag{2.14}$$

dengan :

V	=	nilai *American call option*
S	=	harga saham dalam satuan mata uang
K	=	harga saham pada saat *exercise* dalam satuan mata uang
S_f	=	harga saham optimal pada saat T dalam satuan waktu.

Pembagian dividen sebesar δ dapat disepakati pada kontrak *American call option*, dalam hal ini sistem persamaan *American call option* disertai dividen yaitu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-\delta)S\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\ V(0,t) = 0 \\ V(S,T) = \max(S-K,0) \\ V(S_f,t) = S_f(t) - K \\ \dfrac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = 1. \end{cases} \tag{2.15}$$

Pada saat *maturity date* nilai *American call option* memenuhi *payoff* yaitu $V(S,T) = \max(S-K,0)$. *American call option* tidak memiliki nilai ketika harga saham $S = 0$ dan ketika harga saham maksimum (S_f) maka nilai *American call* *option* juga mencapai maksimum sebesar $S_f(t) - K$.

2.2.9 Stock Loan

Terdapat dua pihak yang terlibat dalam kontrak *stock loan* yaitu *lender* (pemberi pinjaman) dan *borrower* (peminjam). *Lender* memiliki uang yang di pinjamkan sedangkan *borrower* memiliki saham yang dijadikan *collateral* (jaminan) untuk memperoleh pinjaman. *Borrower* memberikan saham sebagai jaminan tanpa kehilangan kepemilikan atas saham tersebut. Ketika harga saham milik *borrower* naik di pasaran melebihi besarnya pinjaman yang tertera pada kontrak maka *borrower* mampu membayar pinjaman dengan demikian *borrower* dapat mengambil alih sahamnya yang dijadikan jaminan. Sebaliknya, jika harga saham di pasaran kurang dari besarnya pinjaman maka *borrower* tidak dapat membayar pinjaman. Jika hal ini terjadi terus menerus sampai jatuh tempo maka *borrower* dapat kehilangan sahamnya. Saham akan di ambil alih oleh pemberi pinjaman.

Besarnya pinjaman tumbuh secara eksponensial terhadap waktu sehingga *pay-off* dari *stock loan*:

$$V(S,t) = \max(S - qe^{\gamma T})$$

V	=	*nilai stock loan*
S	=	*harga saham* dalam satuan mata uang
q	=	besar pinjaman dalam satuan mata uang
γ	=	besarnya suku bunga dalam persen
T	=	maturity date dalam satuan waktu.

Seperti yang telah di jelaskan di atas kontrak pada *stock loan* melibatkan dua pihak yaitu *borrower* (peminjam) dan *lender* (pemberi pinjaman). Mekanisme kontrak *stock loan* mirip seperti kontrak *American call option*. Posisi *borrower* pada kontrak *stock loan* berlaku sebagai *holder* pada *American call option* . Oleh karena adanya kemiripan mekanisme pada *stock loan* dan *American call option* maka persamaan diferensial *stock loan* dapat di kontruksi seperti persamaan diferensial *American call option*.

Persamaan diferensial untuk *stock loan* menggunakan persamaan diferensial *Black-Sholes* seperti pada *American call option* yang disertai dividen:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \delta)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

dengan kondisi batas $V(0,t) = 0$ karena ketika $S = 0$ *stock loan* tidak bernilai.

Pada kontrak *stock loan* peminjam dikenai suku bunga pinjaman dan suku bunga bank. Ketika suku bunga bank lebih kecil dari suku bunga pinjaman $(r < \gamma)$ terjadi kemungkinan akumulasi bunga bernilai negatif.

2.2.10 *Stock Loan* Dengan Dividen Ditahan Oleh *Lender* Sebelum Pelunasan

Dalam kontrak *stock loan* terjadi kesepakatan antara *lender* dengan *borowwer* menganai cara pembagian dividen yaitu pihak *lender* (pemberi pinjaman) menahan dividen sebelum *borrower* (peminjam) mengembalikan uang pinjaman. Cara pembagian dividen tersebut telah dibahas pada paper Dai dan Xu[5]. Pengembalian uang pinjaman bisa terjadi lebih cepat atau tepat pada jatuh tempo yang telah disepakati oleh *borrower* dan *lender*. Nilai intrinsik dari *stock loan* diperoleh dari selisih antara harga saham S dan akumulasi jumlah qe^{t} sehingga diperoleh *pay off* dari *stock loan* yaitu:

$$V(S,T) = \max(S - qe^{\gamma t}, 0)$$

dengan:

S	=	harga saham
q	=	besar pinjaman
γ	=	tingkat suku bunga pinjaman
t	=	waktu
T	=	*maturity date*.

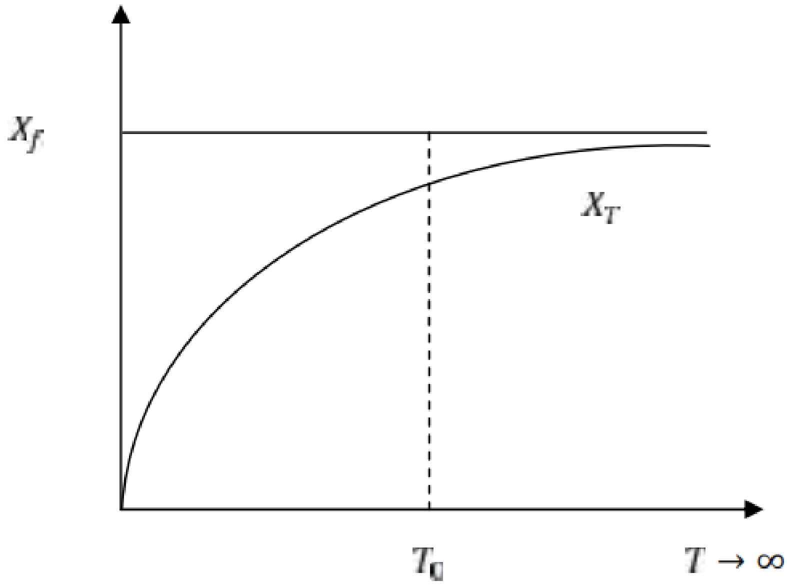
Sistem persamaan diferensial dari *stock loan* didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-\delta) S \dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\ V(0,t) = 0 \\ V(S,T) = \max(S - qe^{\gamma T}, 0) \\ V(S_f(t), t)) = S_f(t) - qe^{\gamma t} \\ \dfrac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = 1 \end{cases} \tag{2.16}$$

Nilai *stock loan* dipengaruhi oleh harga saham (S). Pada saat harga saham $(S = 0)$ nilai *stock loan* adalah nol. Pada saat *maturity date* nilai *stock loan* memenuhi nilai *pay off* yaitu $\max(S - qe^{\gamma T}, 0)$. Dan ketika harga saham mencapai nilai maksimal maka terjadi keuntungan maksimal dari selisih harga saham dan besarnya pinjaman.

2.2.11 *Perilaku Asimtotik Harga Saham Optimal*

Asimtot adalah sebuah garis yang didekati oleh sebuah kurva dengan jarak semakin lama semakin kecil di titik jauh tak hingga.



Gambar 2.4: Asimtotik Harga Saham Optimal

Diberikan X_f yaitu harga saham optimal yang diperoleh dari perhitungan secara analitik dan X_T harga saham optimal yang diperoleh dari perhitungan secara numerik. Asimtotik harga saham optimal dituliskan sebagai:

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} X_T = X_f, \quad \text{untuk } T > T_0, \ |X_f - X_T| < \varepsilon.$$

Secara numerik, perilaku asimtotik harga saham optimal memiliki kecenderungan memiliki nilai yang konstan mendekati X_f untuk T menuju tak hingga[8]. Gambaran perilaku asimtotik harga saham optimal dapat dijadikan bahan pertimbangan bagi holder untuk menentukan *maturity date*.

2.2.12 *Deret Taylor*

Deret Taylor adalah representasi dari fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan persamaan diferensial menggunakan metode numerik.

Diberikan f dengan f^{n+1} berada pada interval $[a, b]$ dan $x_0 \in [a, b]$, terdapat bilangan $\xi(x)$ di antara x_0 :

$$f(x) = P_n(X) + R_n(x),$$

dengan:

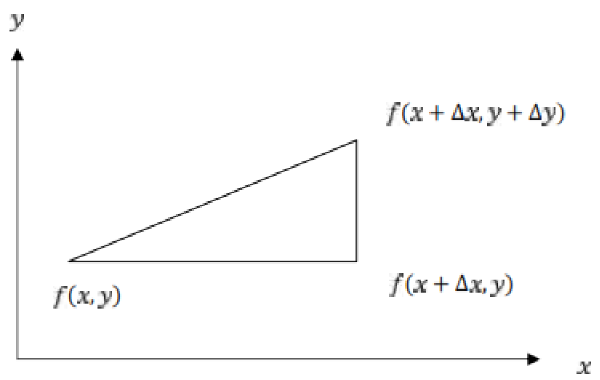
$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k
\end{aligned}$$

dan

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{n + 1!}(x - x_0)^{n+1}.$$

$P_n(x)$ disebut polinomial Taylor berderajad ke-n untuk f pada x_0 dan $R_n(x)$ disebut bagian error yang bergantung pada nilai x dimana polinomial $P_n(x)$ yang dievaluasi. Fungsi $\xi(x)$ tidak bisa ditentukan secara pasti.

Diberikan fungsi f yang memiliki dua variabel yaitu x dan y. Terjadi ekspansi x sejauh Δx dilanjutkan dengan ekspansi y sejauh Δy seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2.5.



Gambar 2.5: Ekspansi fungsi f sejauh

Deret Taylor dengan dua variabel dituliskan:

$$\begin{aligned}
f(x + \Delta x, y + \Delta y) =& f(x, y) + \left\{\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}\right\} + \\
& \frac{1}{2!}\left\{(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \Delta x \Delta y \frac{\partial f}{\partial x \partial y} + (\Delta y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\} + ...
\end{aligned}$$

Diberikan Z untuk nilai *option* $V(S,t)$, dengan perubahan harga saham $dS = \Delta x$ dalam selang waktu $dt = \Delta y$.

$$Z + dZ = Z + \left\{ \frac{\partial Z}{\partial S} dS + \frac{\partial Z}{\partial t} dt \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{dS^2} (dS)^2 + 2 \frac{\partial Z}{\partial S \partial t} dS dt + \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} (dt)^2 \right\} + ...$$

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 V}{dS^2} (dS)^2 + 2 \frac{\partial V}{\partial S \partial t} dS dt + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} (dt)^2 + ...$$

Penerapan deret Taylor untuk membangun persamaan diferensial *Black-Scholes* menggunakan dua variabel dengan pemutusan pada $\frac{\partial V}{\partial S \partial t} dS dt$

2.2.13 Metode Beda Hingga (Finite Difference)

Dalam Persamaan diferensial parsial terdapat lebih dari satu variabel bebas. Untuk menyelesaikan dapat digunakan metode numerik yaitu beda hingga. Metode beda hingga menggunakan ekspansi deret Taylor di titik acuan (x) yang diputus pada orde tertentu.

Diberikan fungsi $f(x)$ yang akan didiferensialkan pada interval $(x_0 - h, x_0 + h)$ dengan nilai h positif yang sangat kecil serta $O(h^n)$ sebagai error sehingga pendekatan deret Taylor dijabarkan sebagai berikut:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f^{'}(x_0)\frac{h}{1!} + f^{''}(x_0)\frac{h^2}{2!} + f^{'''}(x_0)\frac{h^3}{3!} ... f^n(x_0)\frac{h^n}{n!} + O(h^n)$$
$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f^{'}(x_0)\frac{h}{1!} + f^{''}(x_0)\frac{h^2}{2!} - f^{'''}(x_0)\frac{h^3}{3!} ... f^n(x_0)\frac{h^n}{n!} - O(h^n)$$

Dengan modifikasi deret Taylor diperoleh tiga pendekatan dalam metode beda hingga, yaitu:

1. Beda Maju (*Backward Difference*)

   Untuk mendapatkan turunan pertama dengan pendekatan beda maju digunakan deret Taylor pada interval $f(x_0 + h)$. Kemudian dilakukan pemotongan deret Taylor pada turunan ke dua :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f^{'}(x_0)\frac{h}{1!} \\ f(x_0 + h) &= f(x_0) + f^{'}(x_0)h \\ f^{'}(x_0) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ f^{'}(x_0) &\approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

2. Beda Mundur (*Forward Difference*)
   Untuk mendapatkan turunan pertama dengan pendekatan beda mundur gunakan deret Taylor pada interval $f(x_0 - h)$. Kemudian dilakukan pemotongan deret Taylor pada turunan ke dua :

$$\begin{aligned} f(x_0 - h) &= f(x_0) - f^{'}(x_0)h \\ f^{'}(x_0) &= \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \\ f^{'}(x_0) &\approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}. \end{aligned}$$

3. Beda Pusat (*Central Difference*)
   Pendekatan beda pusat sebagai berikut:

$$f^{'}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

   Kemudian turunan kedua diperoleh dari deret Taylor yang ditinjau sampai turunan orde dua dengan proses sebagai berikut:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f^{'}(x_0)\frac{h}{1!} + f^{''}(x_0)\frac{h^2}{2!} \tag{2.17}$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f^{'}(x_0)\frac{h}{1!} + f^{''}(x_0)\frac{h^2}{2!} \tag{2.18}$$

   Dengan menjumlahkan Persamaan 2.17 dan 2.18 diperoleh pendekatan turunan kedua yaitu:

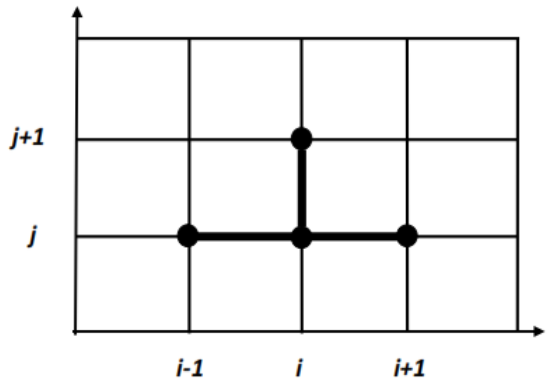
$$f^{''}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}. \tag{2.19}$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh pendekatan untuk turunan ke tiga dan seterusnya.

2.2.14 Metode Crank-Nicolson

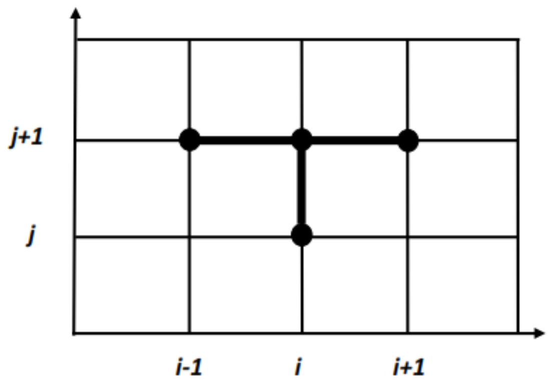
Persamaan *Black-Shcoles* pada sistem persamaan untuk *American call option* dan *stock loan* merupakan persamaan diferensial parsial. Pada prakteknya sistem persamaan sangat sulit diselesaikan menggunakan cara analitik karena adanya *free boundary problem*. Untuk mencari nilai *American call option* maupun *stock loan* pada persamaan *Black-Sholes* akan digunakan pendekatan menggunakan metode numerik yaitu *Crank-Nicolson*. Metode *Crank-Nicolson* merupakan pengembangan metode beda hingga dengan mengambil rata-rata dari metode implisit dan eksplisit.

1. Metode Eksplisit
   Untuk mencari nilai nilai (V) di setiap titik pada variabel waktu $j+1$ dapat dihitung berdasarkan nilai *option* berdasarkan variabel waktu j yang sudah diketahui. Kita perhatikan skema metode eksplisit pada Gambar 2.4. Pada metode eksplisit nilai pada titik $V_{i,j+1}$ diproleh berdasarkan nilai pada titik $V_{i-1,j}$, $V_{i,j}$, dan titik $V_{i+1,j}$.



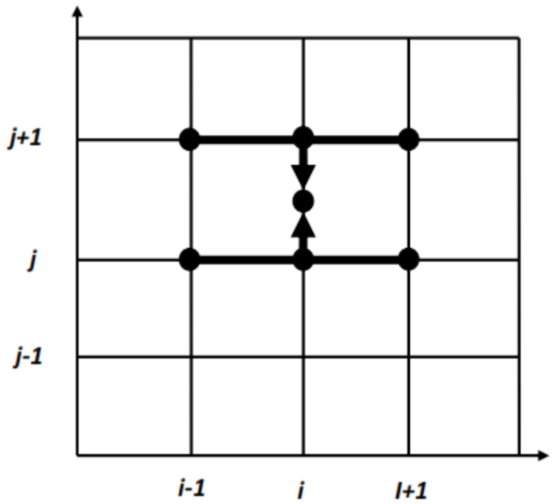
Gambar 2.6: Skema metode eksplisit

2. Metode Implisit
   Untuk mencari nilai (V) di setiap titik pada variabel waktu $j+1$ dapat dihitung berdasarkan variabel waktu j yang sudah diketahui. Kita perhatikan skema metode eksplisit pada Gambar 2.5. Pada metode eksplisit nilai pada titik $V_{i-1,j+1}$, $V_{i,j+1}$, dan titik $V_{i+1,j+1}$ diproleh berdasarkan nilai pada titik $V_{i,j}$.



Gambar 2.7: Skema metode implisit

Pada prinsipnya metode *Crank-Nicolson* merupakan pengembangan dari metode eksplisit dan implisit yaitu rata-rata dari metode eksplisit dan metode implisit. Artinya untuk mencari nilai $V_{i,j}$ diperoleh dari rata-rata nilai V pada selang waktu j sampai $j+1$ seperti yang terlihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.8: Skema *Crank-Nicolson*

Pada persamaan *Black-Scholes* terdapat fungsi V yang mengandung variabel S yang mewakili harga saham dan t yang mewakili waktu. Penerapan untuk diskritisasi grid yaitu variabel S terletak pada sumbu horizontal yang dinyatakan dengan $S = i\Delta S$, sedangkan variabel t terletak pada sumbu vertikal yang dinyatakan dengan $t = j\Delta t$.

Penerapan metode *Crank-Nicolson* untuk mendapatkan $V(S,t)$ di titik $V_{i,j+1/2}$ diperoleh dari rata-rata nilai $V_{i,j+1}$ dan $V_{i,j}$ yaitu:

$$V(S,t) = \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j}}{2}. \tag{2.20}$$

Turunan pertama $V(S,t)$ terhadap t diperoleh dari deret Taylor dengan pendekatan beda maju:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta t} \tag{2.21}$$

Turunan pertama $V(S,t)$ terhadap S diperoleh dari rata-rata nilai pada waktu j dan $j+1$:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{2}\left[\frac{W_{i+1,j+1} - W_{i-1,j+1}}{2\Delta S} + \frac{W_{i+1,j} - W_{i-1,j}}{2\Delta S}\right]. \tag{2.22}$$

Turunan kedua $V(S,t)$ terhadap S:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{V_{i+1,j+1} - 2V_{i,j+1} + V_{i-1,j+1}}{\Delta S^2} + \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta S^2}\right]. \qquad (2.23)$$

Selanjutnya substitusikan (2.19) sampai (2.22) ke dalam persamaan *Black-Scholes.*

2.2.15 SOR (Successive Over Relaxation)

Sering kita temui suatu sistem persamaan linier pada model matematika. Sistem persamaan linier terdiri atas sejumlah persamaan linier berhingga yang didalamnya terdapat sejumlah variabel. Menyelesaikan persamaan linier artinya kita harus menemukan variabel-variabel agar memenuhi sistem persamaan yang dimaksud.

Pada proses penyelesaian persamaan *Black-Sholes* menggunakan metode *Crank-Nicolson* terdapat suatu sistem persamaan linier yaitu :

$$M_1 V^{j+1} = M_2 V^j, \qquad (2.24)$$

M_1 dan M_2 adalah suatu matriks ($M_1, M_2 \in R^{yxy}$) sedangkan V^{j+1} yang mewakili nilai option adalah variabel dalam vektor satu kolom yang akan kita cari penyelesaiannya mengunakan metode iterasi. Hal yang terpenting dalam metode iterasi yaitu kecapatan barisan yang dihasilkan menuju konvergen. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mempercepat memperoleh barisan konvergen adalah metode SOR (*Successive Over Relaxation*). Skema iterasi nilai *option* dari sebuah titik initial $V^{(0)}$:

$$V_i^{k+1} = V_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} V_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{N} a_{ij} V_j^{(k)}\right), \qquad (2.25)$$

Indeks i dimulai dari 1 hingga n ($i = 1, ..., n$). Indeks k digunakan untuk menghitung iterasi dari V dan ω adalah parameter *overrelaxation* sampai menuju konvergen. Untuk SOR bilangan pembobot iterasi omega ω dipilih satu angka diantara 1 sampai 2. Kekonvergenan skema iterasi yaitu:

$$||V^{k+1} - V^k|| < \varepsilon \qquad (2.26)$$

yang artinya selisih harga saham di setiap titik yang berdekatan semakin mendekati angka yang sangat kecil yaitu ε.

Untuk mempermudah perhitungan persamaan (2.24) maka persamaan linear disederhanakan dalam bentuk:

$$M_1 V^{j+1} = r_i \tag{2.27}$$

sedangkan r_i pada ruas kanan adalah:

$$r_i = M_2 V^j + \alpha_i \begin{bmatrix} (V_0^{j+1} + V_0^j) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Untuk memeriksa kemungkinan terjadi *exercise* setiap saat selama masa kontrak dilakukan pengecekan menggunakan:

$$V_i^j = \max\{g_i, V_{i,j}^k\} \tag{2.29}$$

dengan g^i adalah nilai *pay off*.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan tesis.

3.1 Tahapan Penelitian

Terdapat enam tahap yang akan dilakukan dalam pengerjaan penelitian ini yaitu:

1. Studi Literatur
   Peneliti melakukan studi literatur terhadap hal hal yang berkaitan dengan topik penelitian, yaitu : *American call option*, model *Black-Scholes* dan pengembangannya jika disertai dividen, *stock loan* yang juga disertai dividen, metode *Crank-Nicolson* dan SOR.

2. Membangun dan Menyelesaikan Model Matematika
   Pada tahap ini dikaji lebih lanjut tentang nilai optimal *American call option* dan *stock loan*. Selain itu akan dikaji pula bagaimana perilaku asimtotik dari *American call option* dan *stock loan* ketika batas waktu mendekati nilai yang besar.

   (a) *American call option*

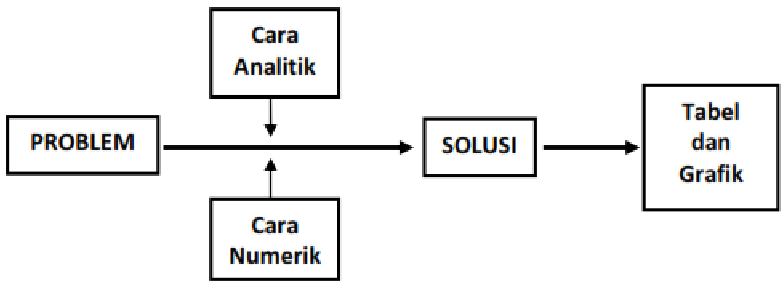
      i. Mencari harga saham optimal *American call option* menggunakan metode beda hingga. *Crank-Nicolson*
      ii. Mencari harga optimal *American call option* jika T tak hingga.
      iii. Mengkaji secara analitik mengenai perilaku asimtotik *American call option* jika T tak hingga .

   (b) *Stock Loan*

      i. Mencari harga saham optimal *Stock loan* menggunakan metode beda hingga *Crank-Nicolson*
      ii. Mencari akibat T tak hingga pada harga optimal, suku bunga bank, suku bunga pinjaman dan dividen dari *stock loan*.
      iii. Mengkaji secara analitik mengenai perilaku asimtotik *stock loan* jika T tak hingga.

3. Simulasi Numerik

   Pada tahap ini akan dicari penyelesaian model yang telah dibangun. Data yang digunakan sebagai input dalam simulasi numerik diperoleh dari data saham PT. Bumi, Tbk (BUMI) yang diunduh dari Busa Efek Indonesia (BEI). Data tersebut meliputi harga saham dan dividen. Sedangkan Suku bunga bank dari data Bank Indonesia. Data tersebut diolah secara numerik dengan bantuan software matlab. Hasil pengolahan data secara numerik disajikan dalam bentuk tabel dan grafik. Dengan melakukan simulasi numerik diharap menghasilkan gambaran secara visual tentang perilaku asimtotik dari harga saham optimal *American call option* dan *stock loan* berdasarkan tentang solusi secara analitik .



4. Analisis Hasil dan Pembahasan

   penelitan ini menganalisis nilai optimal *American call option* dan *stock loan*. Simulasi dilakukan dengan *input* parameter yang berbeda sehingga diperoleh *output* yang berbeda. Outpu yang diperoleh digunakan untuk memperoleh gambaran perilaku asimtotik nilai optimal *American call option* dan *stock loan*.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas langkah-langkah pengembangan persamaan *Black Scholes* hingga menjadi bentuk non-dimensional. Selain itu juga dibahas mengenai penyelesaian persamaan diferensial *American call option* dan *stock loan* secara numerik menggunakan metode *Crank-Nicolson*. Perhitungan secara analitik dilakukan untuk mengamati perilaku asimtotik dari *American call option* maupun *stock loan* jika ditentukan *Maturity date* dalam perjanjian kontrak menuju waktu yang tak hingga. Perhitungan yang diperoleh secara numerik melaui metode *Crank-Nicolson* digunakan untuk validasi hasil perhitungan secara analitik.

4.1 Pembentukan Persamaan *Black Scholes* Disertai Dividen

Pembentukan portofolio (kekayaan) pada awal investasi dipengaruhi oleh nilai *option* dan harga saham. Ketika seorang investor ingin membeli option maka dia harus mengeluarkan uang untuk harga saham sejumlah Δ:

$$\Pi = V - \Delta S. \tag{4.1}$$

Banyaknya lembar saham dinyatakan dengan Δ sedangkan S adalah harga saham yang nilainya bisa berubah.

Pembagian dividen sebesar δ diberikan oleh perusahaan penerbit saham seiring berjalannya investasi sehingga investor memperoleh pembagian keuntungan dari perusahaan penerbit saham sebesar δ untuk setiap lembar saham. Perubahan portofolio disertai dividen dituliskan sebagai berikut:

$$d\Pi = dV - (\Delta dS + \delta \Delta S dt),$$

$$d\Pi = dV - \Delta dS - \delta \Delta S dt. \tag{4.2}$$

Ketika perusahaan penerbit saham mengumumkan pembagian dividen, banyak *investor* yang ingin membeli saham. Pada saat itu harga saham bergerak naik. Kondisi ini tidak berlangsung lama karena setelah terjadi pembagian dividen harga saham akan turun sebesar dividen yang diberikan sehingga perubahan harga saham S pada saat t setelah terjadi pembagian dividen diasumsikan mengikuti

Geometric Brownian motion:

$$dS = (\mu - \delta)Sdt + \sigma S dW_t. \tag{4.3}$$

Substitusikan Persamaan 4.3 pada deret Taylor dua variabel :

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}dt, \tag{4.4}$$

sehingga diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned}
dV(S,t) &= \frac{\partial V}{\partial S}\left[(\mu - \delta)Sdt + \sigma S dW_t\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left[(\mu - \delta)Sdt + \sigma S dW_t\right]^2 \\
&\quad + \frac{\partial V}{\partial t}dt, \\
dV(S,t) &= (\mu - \delta)Sdt\frac{\partial V}{\partial S} + (\sigma S dW_t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}(\mu - \delta)^2 S^2 dt^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\
&\quad + (\mu - \delta)Sdt\sigma S dW_t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (dW_t)^2. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Terdapat kondisi stokastik pada persamaan 4.5, Menurut jiang [7] untuk mengubah kondisi stokastik menjadi deterministik diperlukan varians *random walk* :

$$dW_t^2 = dt \tag{4.6}$$

$$dW_t dt = 0 \tag{4.7}$$

$$dt^2 = 0. \tag{4.8}$$

Substitusikan (4.6),(4.7) dan (4.8) pada Persamaan 4.5 sehingga diperoleh :

$$dV(S,t) = (\sigma S dW_t)\frac{\partial V}{\partial S} + \left[(\mu - \delta)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt. \tag{4.9}$$

Perubahan portofolio setelah terjadi perubahan harga saham:

$$d\Pi = (\sigma S dW_t)\frac{\partial V}{\partial S} + \left[(\mu - \delta)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt - \Delta dS - \delta \Delta S dt. \tag{4.10}$$

Ditentukan $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$ untuk menghilangkan kondisi stokastik pada Persamaan 4.10.

$$d\Pi = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta \frac{\partial V}{\partial S} S\right] dt. \tag{4.11}$$

Dengan prinsip bebas resiko seperti menyimpan kekayaan di bank sehingga portofolio pada market sama dengan portofolio di bank :

$$\Pi = \Pi_{bank} \tag{4.12}$$

Jika diasumsikan tingkat suku bunga bebas resiko adalah r maka perubahan portofolio selama investasi :

$$d\Pi = d\Pi r dt. \tag{4.13}$$

Substitusikan (4.11) dan (4.1) pada (4.13)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta \frac{\partial V}{\partial S}\right] dt &= (V - \Delta S) r dt \\
\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \delta \frac{\partial V}{\partial S}\right] dt &= (V - \frac{\partial V}{\partial S} S) r dt
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Diperoleh persamaan *Black-Scholes* disertai pembagian dividen :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{4.15}$$

4.2 Transformasi Sistem Persamaan *American Call Option* Dan *Stock Loan* Menjadi Sistem Persamaan Tanpa Dimensi (Non-Dimensional)

Untuk mempermudah perhitungan dilakukan transformasi sistem persamaan diferensial untuk *American call option* dan *Stock loan* sehingga sistem persamaan tersebut berada dalam kondisi non-dimensional. Transformasi dilakukan dengan mungubah variabel pada Persamaan Diferensial beserta batas-batasnya. Sistem persamaan non dimensional diselesaikan secara numerik menggunakan metode Crank-Nicolson.

4.2.1 Transformasi Sistem Persamaan American Call Option

Transformasi dilakukan pada sistem persamaan *American call option*. Transformasi pada sistem Persamaan *American call option* 2.15 dilakukan dengan cara mengubah variabel sebagai berikut[13]:

$$S = XK \tag{4.16}$$

$$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \tag{4.17}$$

$$V(S,t) = U(X,\tau)K. \tag{4.18}$$

Terdapat tiga turunan yang ada pada persamaan *Black-Scholes* yaitu turunan V terhadap t, turunan V terhadap S, dan turunan kedua V terhadap S. Untuk mengubah Persamaan *Black-Scholes* dengan dimensi menjadi persamaan *Black-Scholes* non-dimensional diperlukan transformasi pada masing masing turunan.
Laju nilai *American call option* dalam waktu singkat yang direpresentasikan oleh turunan pertama V terhadap t:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} &= \frac{\partial[U(X,\tau)K]}{\partial t} \\
&= \frac{\partial U(X,\tau)}{\partial t}K + U(X,\tau)\frac{\partial(K)}{\partial t} \\
&= K\left[\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial U(X,\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\right] + U(X,\tau)0 \\
&= K\left[0 + \frac{\partial U(X,\tau)}{\partial \tau}(-\frac{1}{2}\sigma^2)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial \tau}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Laju nilai *American call option* terhadap harga saham yang direpresentasikan oleh turunan pertama V terhadap S:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} &= \frac{\partial[U(X,\tau)K]}{\partial S} \\
&= \frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial S}K + U(X,\tau)\frac{\partial(K)}{\partial S} \\
&= K\left[\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial U(X,\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S}\right] + 0 \\
&= K\left[\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\frac{1}{K} + \frac{\partial U(X,\tau)}{\partial \tau}0\right] \\
&= K\left[\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\frac{1}{K}\right] \\
&= \frac{\partial U(X,\tau)}{\partial X}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Laju pertambahan nilai *American call option* terhadap nilai saham karena adanya *volatility*, direpresentasikan oleh turunan kedua V terhadap S:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial X}\right) \\
&= \frac{\partial^2 U(X,\tau)}{\partial X^2}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{S}{K}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right) \\
&= \frac{\partial^2 U(X,\tau)}{\partial X^2}\frac{1}{K} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial X}\right)0 \\
&= \frac{\partial^2 U(X,\tau)}{\partial X^2}\frac{1}{K}. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Persamaan 4.19,4.20 dan 4.21 disubstitusikan pada persamaan *Black-Scholes* dengan dimensi 2.15:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-\delta)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

diperoleh:
$-\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2(XK)^2\frac{\partial^2 U(X,\tau)}{\partial X^2}\frac{1}{K} + (r-\delta)XK\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial X} - rU(X,\tau)K = 0.$
Kedua ruas dikalikan dengan $\frac{2}{\sigma^2 K}$:

$$-\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial \tau} + X^2\frac{\partial^2 U(X,\tau)}{\partial X^2} + (r-\delta)\frac{2}{\sigma^2}X\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial X} + \frac{2r}{\sigma^2}U(X,\tau) = 0,$$

sehingga:

$$-\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial \tau} + X^2\frac{\partial^2 U(X,\tau)}{\partial X^2} + \left(\frac{2r-2\delta}{\sigma^2}\right)\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial X} - \left(\frac{2r}{\sigma^2}\right)U(X,\tau) = 0. \qquad (4.22)$$

Persamaan 4.22 disederhanakan menjadi:

$$-\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial \tau} + X^2\frac{\partial^2 U(X,\tau)}{\partial X^2} + (\alpha-\beta)X\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial X} - \alpha U(X,\tau) = 0 \qquad (4.23)$$

dengan : $\alpha = \frac{2r}{\sigma^2}$ dan $\beta = \frac{2\delta}{\sigma^2}$.

Persamaan 2.15 memiliki empat kondisi batas masing-masing dalam kondisi dimensional. Transformasi juga dilakukan pada ke empat kondisi batas sebagai berikut:

a. Kondisi awal terjadi pada saat harga saham sama dengan nol $(X = 0)$. Pada kondisi ini *option* tidak memiliki nilai,

$$V(0, t) = 0.$$

Proses transformasi kondisi awal sesuai perubahan variabel pada persamaan (4.17) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} U(0, \tau)K &= 0 \\ U(0, \tau) &= 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

b. Kondisi akhir terjadi pada saat *maturity date* dengan $t = T$, nilai *option* sama dengan *payoff*:

$$V(S, T) = \max(S - K, 0).$$

Transformasi kondisi akhir berdasarkan perubahan variabel sesuai persamaan (4.17) yaitu :

$$\begin{aligned} U(X, 0)K &= \max(XK - K, 0) \\ U(X, 0) &= \max(X - 1, 0). \end{aligned} \tag{4.25}$$

c. Batas bebas pertama terjadi ketika $S = S_f$, pada saat inilah pemegang *option* dapat melakukan *exercise* dan diharapkan pemegang *option* memperoleh keuntungan ,

$$V(S_f(t), t) = S_f(t) - K.$$

Proses transformasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} U(X_f(\tau), \tau)K &= X_f(\tau)K - K \\ U(X_f(\tau), \tau)K &= (X_f(\tau) - 1)K \\ U(X_f(\tau), \tau) &= (X_f(\tau) - 1) \end{aligned} \tag{4.26}$$

d. Batas bebas kedua yaitu harga saham mencapai maksimum yang bersifat kontinyu:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = 1$$

Dengan proses transformasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial S} &= 1 \\
\frac{\dfrac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial X}}{\dfrac{\partial X}{\partial S}} &= 1 \\
\frac{\dfrac{\partial U(S_f(\tau), \tau)}{\partial X} K}{K} &= 1 \\
\frac{\partial U}{\partial X} U(X_f(\tau), \tau) &= 1. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil transformasi persamaan (4.21) sampai dengan persamaan (4.26) maka sistem persamaan *American call option* non-dimensional didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{cases}
-\dfrac{\partial U}{\partial \tau} + X^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (\alpha - \beta) X \dfrac{\partial U}{\partial X} - \alpha U = 0 \\
U(0, \tau) = 0 \\
U(X, 0) = \max(X - 1, 0) \\
U(X_f(\tau), \tau) = X_f(\tau) - 1 \\
\dfrac{\partial U}{\partial X}(X_f(\tau), \tau) = 1.
\end{cases} \qquad (4.28)$$

dengan : $\alpha = \dfrac{2r}{\sigma^2}$ dan $\beta = \dfrac{2\delta}{\sigma^2}$.

4.2.2 Transformasi Sistem Persamaan Stock Loan

Untuk mengubah sistem persamaan *stock loan* 2.16 menjadi sistem persamaan non-dimensional dilakukan transformasi dengan cara mengubah variabel sebagai berikut[11]:

$$S = Xqe^{\gamma t} \qquad (4.29)$$

$$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \qquad (4.30)$$

$$V(S, t) = W(X, \tau)qe^{\gamma t}. \qquad (4.31)$$

Variabel pada Persamaan 4.29 sampai dengan 4.31 digunakan untuk transformasi turunan yang ada didalam persamaan *Black-Scholes* pada persamaan 2.16. Transformasi dilakukan pada turunan V terhadap t, turunan V terhadap S, dan turunan kedua V terhadap S.

Laju nilai *stock loan* dalam waktu singkat yang direpresentasikan oleh turunan pertama V terhadap t:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} &= \frac{\partial[W(X,\tau)qe^{\gamma t}]}{\partial t}\\ &= qe^{\gamma t}\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial(qe^{\gamma t})}{\partial t}W(X,\tau)\\ &= qe^{\gamma t}\left[\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial W(X,\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\right] + \gamma qe^{\gamma t}W(X,\tau)\\ &= qe^{\gamma t}\left[\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial x}(-\frac{S}{q}\gamma e^{-\gamma t}) + \frac{\partial W(X,\tau)}{\partial \tau}(-\frac{1}{2}\sigma^2)\right] + \gamma qe^{\gamma t}W(X,\tau)\\ &= -Xqe^{\gamma t}\gamma\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial x} - \frac{1}{2}qe^{\gamma t}\sigma^2\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial \tau} + \gamma qe^{\gamma t}W(X,\tau). \quad (4.32)\end{aligned}$$

Laju perubahan nilai *stock loan* terhadap nilai saham direpresentasikan oleh turunan pertama V terhadap S:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} &= \frac{\partial(W(X,\tau))qe^{\gamma t}}{\partial S}\\ &= qe^{\gamma t}\frac{\partial(W(X,\tau))}{\partial S} + W(X,\tau)\frac{\partial qe^{\gamma t}}{\partial S}\\ &= qe^{\gamma t}\left[\frac{\partial(W(X,\tau))}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial W(X,\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S}\right] + 0\\ &= qe^{\gamma t}\left[\frac{\partial(W(X,\tau))}{\partial X}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{S}{qe^{\gamma t}}\right) + \frac{\partial W(X,\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right)\right]\\ &= qe^{\gamma t}\left[\frac{\partial(W(X,\tau))}{\partial X}\frac{1}{qe^{\gamma t}} + \frac{\partial W(X,\tau)}{\partial \tau}0\right]\\ &= qe^{\gamma t}\left[\frac{\partial(W(X,\tau))}{\partial X}\frac{1}{qe^{\gamma t}}\right]\\ &= \frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X}. \quad (4.33)\end{aligned}$$

Penambahan laju nilai *stock loan* terhadap nilai saham karena volatiliti direpresentasikan oleh turunan kedua V terhadap S:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X}\right)\frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X}\right)\frac{\partial \tau}{\partial S} \\
&= \frac{\partial^2 W(X,\tau)}{\partial X^2}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{S}{qe^{\gamma t}}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right) \\
&= \frac{\partial^2 W(X,\tau)}{\partial X^2}\frac{1}{qe^{\gamma t}} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X}\right)0 \\
&= \frac{\partial^2 W(X,\tau)}{\partial X^2}\frac{1}{qe^{\gamma t}}. \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

persamaan 4.32,4.33 dan 4.34 disubstitusikan pada persamaan *Black-Scholes* dengan dimensi 2.16:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-\delta)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

diperoleh :

$$-Xqe^{\gamma t}\gamma\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial x} - \frac{1}{2}qe^{\gamma t}\sigma^2\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial \tau} + \gamma qe^{\gamma t}W(X,\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2(Xqe^{\gamma t})^2$$
$$\frac{\partial^2 W(X,\tau)}{\partial X^2}\frac{1}{qe^{\gamma t}} + (r-\delta)Xqe^{\gamma t}\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X} - rW(X,\tau)qe^{\gamma t} = 0.$$

Kedua ruas dikalikan $\frac{2}{\sigma^2 qe^{\gamma t}}$:

$$-\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial \tau} + X^2\frac{\partial^2 W(X,\tau)}{\partial X^2} + \left(\frac{2(r-s)}{\sigma^2}X - \frac{2\gamma}{\sigma^2}X\right)\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X}$$
$$+\frac{2\gamma}{\sigma^2}W(X,\tau) - \frac{2rW(X,\tau)}{\sigma^2} = 0,$$

sehingga

$$-\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial \tau} + X^2\frac{\partial^2 W(X,\tau)}{\partial X^2} + \left(\frac{2r-2\gamma-2\delta}{\sigma^2}\right)X\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X}$$
$$-\left(\frac{2r-2\gamma}{\sigma^2}\right)W(X,\tau) = 0.$$

Ruas kiri disederhanakan menjadi:

$$-\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial \tau} + X^2\frac{\partial^2 W(X,\tau)}{\partial X^2} + (\alpha-\beta)X\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X} - \alpha W(X,\tau) = 0 \quad (4.35)$$

dengan : $\alpha = \dfrac{2(r-\gamma)}{\sigma^2}$ dan $\beta = \dfrac{2\delta}{\sigma^2}$.

Transformasi juga dikenakan pada kondisi batas pada Persamaan 2.16 sebagai berikut:

a. Pada saat harga saham sama dengan nol, *stock loan* tidak memiliki nilai. Kondisi ini sangat tidak diharapkan karena *borrower* tidak dapat melunasi pinjamannya.

$$V(0,t) = 0$$

Transformasi kondisi awal dilakukan dengan mengubah variabel menggunakan persamaan (4.30):

$$\begin{aligned} W(0,\tau)qe^{\gamma t} &= 0 \\ W(0,\tau) &= 0. \end{aligned} \tag{4.36}$$

b. Kondisi akhir terjadi pada saat *maturity date* dimana $t = T$.

$$V(S,T) = \max(S - qe^{\gamma T}, 0)$$

Transformasi kondisi akhir yaitu :

$$\begin{aligned} W(X,0)qe^{\gamma T} &= \max(Xqe^{\gamma T} - qe^{\gamma T}, 0) \\ W(X,0) &= \max(X - 1, 0). \end{aligned} \tag{4.37}$$

c. Batas bebas pertama terjadi ketika ketika harga saham mencapai maksimum $(S = S_f)$ maka nilai *stock loan* mencapai maksimum. Pada saat ini peminjam dapat melunasi hutangnya dan kemungkinan masih memperoleh keuntungan:

$$V(S_f(t),t) = S_f(t) - qe^{\gamma t}$$

Transformasi batas bebas pertama sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W(X_f(\tau),\tau)qe^{\gamma t} &= X_f(\tau)qe^{\gamma t} - qe^{\gamma t} \\ W(X_f(\tau),\tau)qe^{\gamma t} &= (X_f(\tau) - 1)qe^{\gamma t} \\ W(X_f(\tau),\tau) &= (X_f(\tau) - 1) \end{aligned} \tag{4.38}$$

d. Batas bebas kedua yaitu nilai saham maksumum pada saat t yang bersifat konstan:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = 1$$

Proses transformasi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial S} &= 1 \\
\frac{\dfrac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial X}}{\dfrac{\partial X}{\partial S}} &= 1 \\
\frac{\dfrac{\partial W(S_f(\tau), \tau)}{\partial X} q e^{\gamma t}}{q e^{\gamma t}} &= 1 \\
\frac{\partial W}{\partial X} W(X_f(\tau), \tau) &= 1, \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan 4.32 sampai dengan Persamaan 4.39 maka *Stock loan* non-dimensional sebagai berikut :

$$\begin{cases}
-\dfrac{\partial W}{\partial \tau} + X^2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial X^2} + (\alpha - \beta) X \dfrac{\partial W}{\partial X} - \alpha W = 0 \\
W(0, \tau) = 0 \\
W(X, 0) = \max(X - 1, 0) \\
W(X_f(\tau), \tau) = X_f(\tau) - 1 \\
\dfrac{\partial W}{\partial X}(X_f(\tau), \tau) = 1.
\end{cases} \qquad (4.40)$$

dengan : $\alpha = \dfrac{2(r - \gamma)}{\sigma^2}$ dan $\beta = \dfrac{2\delta}{\sigma^2}$.

4.3 Analisis Nilai Asimtotik

Analisis asimtotik dari kontrak *American call option* maupun *stock loan* ditunjukkan dari kontrak perpetual *American call option* maupun *stock loan*.

4.3.1 Perpetual dari American call option

Perpetual *American call option* adalah kontrak pada *American call option* yang tidak bergantung waktu atau tidak memiliki *expiry date*. Oleh sebab itu laju nilai *American call option* terhadap waktu diabaikan. Sistem prsamaan differensial untuk perpetual *American call option* dapat dituliskan:

$$\begin{cases} X^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (\alpha - \beta)X\dfrac{\partial U}{\partial X} - \alpha U = 0 \\ U(X_f) = (X_f - 1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial X}(X = X_f) = 1 \\ U(0) = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

dengan :

U	=	nilai *American call option*
X	=	harga saham non dimensional
X_f	=	harga saham optimal *American call option* .

Persamaan diferensial perpetual *American call option* pada (4.41) digunakan untuk menentukan harga saham optimal secara analitik. Persamaan (4.41) merupakan persamaan diferensial biasa orde dua. Pertama kita misalkan $U = X^a$ sebagai solusi khusus untuk menemukan akar-akar yang akan digunakan mencari solusi umum. Substitusikan $U = X^a$ pada persamaan diferensial perpetual *American call option* (4.41):

$$X^2\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (\alpha - \beta)X\frac{\partial U}{\partial X} - \alpha U = 0$$

.

Diperoleh:

$$X^2\left[\frac{\partial^2 X^a}{\partial X^2}\right] + (\alpha - \beta)X\left[\frac{\partial X^a}{\partial X}\right] - \alpha X^a = 0. \tag{4.42}$$

$\left[\dfrac{\partial X^a}{\partial X}\right]$ adalah turunan pertama X^a terhadap X:

$$\left[\frac{\partial X^a}{\partial X}\right] = aX^{a-1}$$

$\left[\dfrac{\partial^2 X^a}{\partial X^2}\right]$ adalah turunan ke dua X^a terhadap X:

$$\left[\frac{\partial^2 X^a}{\partial X^2}\right] = a(a-1)X^{a-2}$$

Untuk memperoleh akar-akar, substitusikan $\left[\dfrac{\partial X^a}{\partial X}\right]$ dan $\left[\dfrac{\partial^2 X^a}{\partial X^2}\right]$ pada Persamaan 4.42:

$$\begin{aligned} X^2 a(a-1)X^{a-2} + (\alpha-\beta)XaX^{a-1} - \alpha X^a = 0 \\ a^2 + (\alpha-\beta-1)a - \alpha = 0. \end{aligned}$$

Sesuai hasil transformasi persamaan diferensial *American call option* bahwa: $\alpha = \dfrac{2r}{\sigma^2}$ dan $\beta = \dfrac{2\delta}{\sigma^2}$ diperoleh akar-akar :

$$\begin{aligned} a_{+,-} &= \frac{-(\frac{2r}{\sigma^2} - \frac{2\delta}{\sigma^2} - 1)\pm\sqrt{(\frac{2r}{\sigma^2} - \frac{2\delta}{\sigma^2} - 1)^2 - 4(-\frac{2r}{\sigma^2})}}{2} \\ a_{+,-} &= \frac{-(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)\pm\sqrt{(r-\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Solusi umum dari perpetual *American call option*:

$$U(X) = AX^{a-} + BX^{a+}, \tag{4.44}$$

ketika harga saham optimal, solusi umum persamaan (4.46) mengikuti:

$$U(X_f) = AX_f^{a-} + BX_f^{a+}. \tag{4.45}$$

Berdasarkan *boundary condition* ketika harga saham mencapai maksimum yaitu $U(X_f) = X_f - 1$, persamaan (4.32) menjadi:

$$X_f - 1 = AX_f^{a-} + BX_f^{a+}. \tag{4.46}$$

Jika $A = 0$ maka:

$$\begin{aligned} X_f - 1 &= BX_f^{a+} \\ B &= \frac{X_f - 1}{X_f^{a+}}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Substitusikan persamaan (4.43) pada $U(X)$ sehingga diperoleh U dengan variabel

X dan X_f yaitu:

$$\begin{aligned}U(X,X_f) &= AX_f^{a-} + BX_f^{a+}\\ A=0 \text{ diperoleh } U(X,X_f) &= \left(\frac{X_f-1}{X_f}\right) X^{a+}\\ U(X,X_f) &= \left(\frac{X}{X_f}\right)^{a+}(X_f-1).\end{aligned} \tag{4.48}$$

Harga saham maksimum terjadi ketika turunan pertama $U(X,X_f)$ terhadap X_f sama dengan nol:

$$\begin{aligned}\frac{dU(X,X_f)}{dX_f} &= 0\\ X^{a+}X_f^{-a_+-1}(X_f-1) + (X^{a+}X_f^{-a_+}) &= 0\\ -a_+(X_f-1)+X_f &= 0\\ (1-a_+)(X_f-1)+X_f &= 0\\ X_f = \frac{-a_+}{1-a_+}\\ X_f = \frac{a_+}{a_+-1}.\end{aligned} \tag{4.49}$$

Ketika $\delta = 0$ diperoleh akar karakteristik:

$$\begin{aligned}a_+ &= \frac{-(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sqrt{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)^2+2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}\\ a_+ &= \frac{-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sqrt{(r+\frac{1}{2}\sigma^2)^2}}{\sigma^2}\\ a_+ &= \frac{-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma^2}\\ a_+ &= 1.\end{aligned} \tag{4.50}$$

Selanjutnya akar karakteristik pada 4.50 disubstitusikan pada 4.49 sehingga diperoleh harga saham maksimum mendekati nilai yang sangat besar yaitu:

$$\begin{aligned}&\lim_{a^+\longrightarrow 1} X_f\\ &X_f \to \infty\end{aligned} \tag{4.51}$$

pada saat $\delta = 0$, *holder* tidak dapat melakukan *exercise* karena nilai option tidak pernah optimal. Nilai *American call option* dengan $\delta = 0$ sama seperti nilai *European call option*

Berdasarkan Persamaan 4.49 dan 4.51 diperoleh nilai optimal *American call option* terdefinisi pada:

$$X_f = \begin{cases} \dfrac{a_+}{a_+ - 1}, \text{ jika } \delta > 0 \text{ atau } \delta = 0 \text{ dan } r < \delta - \dfrac{1}{2}\sigma^2 \\ \infty \text{ jika } \delta = 0 \text{ dan } \delta - \dfrac{1}{2}\sigma^2 \leq r < \delta \end{cases} \tag{4.52}$$

dengan:

$$a_+ = \frac{-(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sqrt{(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2} \tag{4.53}$$

4.3.2 Perpetual dari *Stock Loan*

Perpetual *stock loan* adalah kontrak pada stock loan yang tidak bergantung pada *expiry date*. Oleh sebab itu laju nilai *stock loan* terhadap waktu diabaikan. Sistem persamaan diferensial untuk perpetual *stock loan* dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$\begin{cases} X^2 \left[\dfrac{\partial^2 W}{\partial X^2}\right] + (\alpha - \beta)X \left[\dfrac{\partial W}{\partial X}\right] - \alpha W = 0 \\ W(X_f) = (X_f - 1) \\ \dfrac{\partial W}{\partial X}(X = X_f) = 1 \\ W(0) = 0, \end{cases} \tag{4.54}$$

dengan :

W	=	nilai *stock loan*
X	=	harga saham non dimensional
X_f	=	harga saham optimal *stock loan*.

Selanjutnya akan diselesaikan persamaan diferensial tingkat dua untuk mencari harga optimal dari *stock loan* pada Persamaan Diferensial 4.54. Untuk memperoleh solusi umum dimisalkan $W = X^a$ yang berlaku sebagai solusi khusus kemudian $W = X^a$ disubstitisikan pada Persamaan 4.54 sehingga menjadi:

$$X^2 \left[\frac{\partial^2 X^a}{\partial X^2}\right] + (\alpha - \beta)X \left[\frac{\partial X^a}{\partial X}\right] - \alpha X^a = 0. \tag{4.55}$$

$\left[\dfrac{\partial X^a}{\partial X}\right]$ adalah turunan pertama X^a terhadap X:

$$\left[\frac{\partial X^a}{\partial X}\right] = aX^{a-1}$$

$\left[\dfrac{\partial^2 X^a}{\partial X^2}\right]$ adalah turunan ke dua X^a terhadap X:

$$\left[\frac{\partial^2 X^a}{\partial X^2}\right] = a(a-1)X^{a-2}$$

Untuk memperoleh akar-akar, substitusikan $\left[\dfrac{\partial X^a}{\partial X}\right]$ dan $\left[\dfrac{\partial^2 X^a}{\partial X^2}\right]$ pada Persamaan 4.57:

$$\begin{aligned} X^2 a(a-1)X^{a-2} + (\alpha-\beta)XaX^{a-1} - aX^a = 0 \\ a^2 + (\alpha-\beta-1)a - a = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{+,-} &= \frac{-(\alpha-\beta-1)^{+}_{-}\sqrt{(a-\beta-1)^2 - 4(1)(-\alpha)}}{2(1)}. \\ a_{+,-} &= \frac{-(\alpha-\beta-1)^{+}_{-}\sqrt{(a-\beta-1)^2 - 4(-\alpha)}}{2}. \end{aligned}$$

Sesuai hasil transformasi persamaan diferensial *stock loan* bahwa $\alpha = \dfrac{2(r-\gamma)}{\sigma^2}$ dan $\beta = \dfrac{2\delta}{\sigma^2}$ diperoleh :

$$\begin{aligned} a_{+,-} &= \frac{-(\frac{2r-2\gamma}{\sigma^2} - \frac{2\delta}{\sigma^2} - 1)^{+}_{-}\sqrt{(\frac{2r-2\gamma}{\sigma^2} - \frac{2\delta}{\sigma^2} - 1)^2 - 4(-\frac{2r-2\gamma}{\sigma^2})}}{2} \\ a_{+,-} &= \frac{-(r-\gamma-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)^{+}_{-}\sqrt{(r-\gamma-\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Solusi umum dari Persamaan Diferensial 4.55 adalah:

$$W(X) = AX^{a_-} + BX^{a_+},$$

ketika harga saham optimal maka solusi umum mengikuti:

$$W(X_f) = AX_f^{a-} + BX_f^{a+}. \tag{4.57}$$

Berdasarkan *boundary condition* bahwa ketika harga saham mencapai maksimum yaitu $W(X_f) = X_f - 1$ maka Persamaan 4.57 menjadi:

$$X_f - 1 = AX_f^{a-} + BX_f^{a+}.$$

Jika $A = 0$ maka:

$$\begin{aligned} X_f - 1 &= BX_f^{a+} \\ B &= \frac{X_f - 1}{X_f^{a+}}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Substitusikan Persamaan 4.58 pada $W(X)$ sehingga diperoleh W dengan variabel X dan X_f yaitu :

$$\begin{aligned} W(X, X_f) &= AX^{a-} + \frac{X_f - 1}{X_f^{a+}} X^{a+} \\ A = 0 \text{ maka } W(X, X_f) &= \frac{X_f - 1}{X_f^{a+}} X^{a+} \\ W(X, X_f) &= \left(\frac{X}{X_f} \right)^{a+} (X_f - 1). \end{aligned}$$

Harga saham maksimum terjadi ketika turunan pertama dari $W(X, X_f)$ terhadap X_f sama dengan nol:

$$\begin{aligned} \frac{dW(X, X_f)}{dX_f} &= 0 \\ X^{a+}(-a_+)X_f^{-a_+-1}(X_f - 1) + X^{a+}X^{-a+}1 &= 0 \\ (-a_+)(X_f - 1) + X_f &= 0 \\ X_f(1 - a_+) &= (-a_+) \\ X_f &= \frac{a_+}{a_+ - 1}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Ketika $\delta = 0$ artinya pembagian dividen tidak terjadi. Diperoleh akar karakteristik:

$$\begin{aligned}
a_+ &= \frac{-(r-\gamma-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sqrt{(r-\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2)^2}}{\sigma^2} \\
a_+ &= \frac{-(r-\gamma-\frac{1}{2}\sigma^2)+(r-\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma^2} \\
a_+ &= -\frac{1}{\sigma^2}(r-\gamma-\frac{1}{2}\sigma^2)+\frac{1}{\sigma^2}(r-\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2) \\
a_+ &= 1. \qquad (4.60)
\end{aligned}$$

Untuk nilai $\delta = 0$ harga saham maksimum mendekati nilai yang besar, dapat diperoleh dari substitusi Persamaan 4.60 pada 4.59 yaitu:

$$\begin{aligned}
&\lim_{a^+ \longrightarrow 1} X_f \\
&X_f \to \infty. \qquad (4.61)
\end{aligned}$$

Hasil substitusi Persamaan 4.61 pada 4.59 diperoleh nilai optimal perpetual *stock loan* terdefinisi pada:

$$X_f = \begin{cases} \dfrac{a_+}{a_+ - 1}, \text{ jika } \delta > 0 \text{ atau } \delta = 0 \text{ dan } r < \gamma - \dfrac{1}{2}\sigma^2 \\ \infty \text{ jika } \delta = 0 \text{ dan } \gamma - \dfrac{1}{2}\sigma^2 \leq r < \gamma \end{cases} \qquad (4.62)$$

dengan :

$$a_+ = \frac{-(r-\gamma-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sqrt{(r-\gamma-\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)^2+2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}. \qquad (4.63)$$

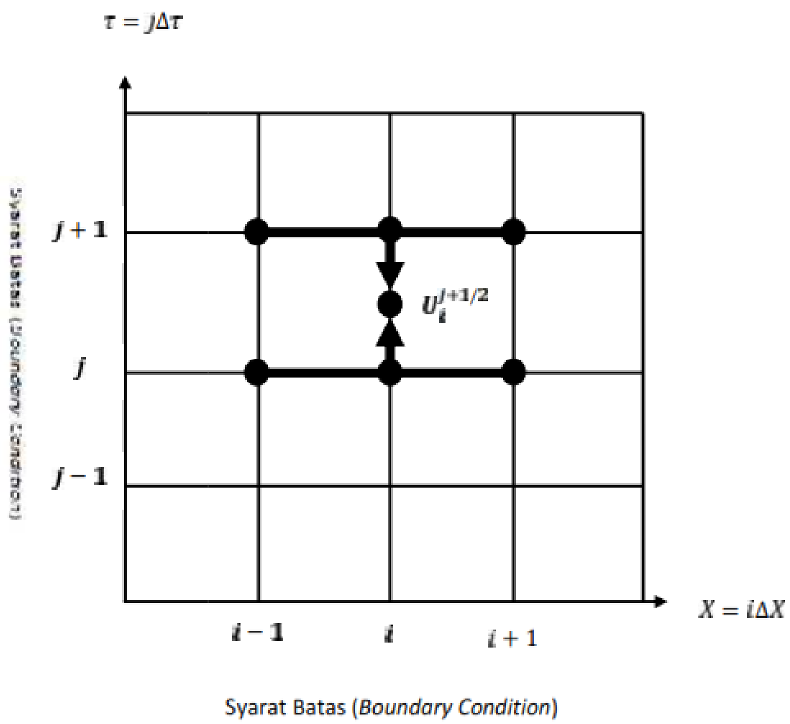
4.4 Perhitungan Secara Numerik

Perhitungan secara numerik dilakukan dengan metode Crank-Nicolson untuk menemukan nilai *American call option* maupun *stock loan*. Hasil perhitungan secara numerik digunakan untuk menggambarkan solusi umum yang diperoleh secara analitik.

4.4.1 Metode Crank-Nicolson untuk American call option

Persianer differensial *Black-Scholes* untuk *American call option* pada Persamaan 4.28 akan diselesaikan menggunakan metode *Crank-Nicolson*.

Gambar 4.1 merupakan pembagian untuk memudahkan perhitungan secara numerik.



Gambar 4.1: Grid *American Call Option*

Harga saham non dimensional terletak pada domain X yang setiap titiknya memiliki indeks i sehingga $X = i\Delta X$ dengan $i = 0, 1, 2, 3, ..., N$. Domain X dibagi menjadi N bagian sehingga terbentuk sebanyak $N + 1$ titik. Waktu terletak pada domain τ yang setiap titiknya memiliki indeks j sehingga $\tau = j\Delta\tau$ dengan $j = 0, 1, 2, 3, ..., M$. Domain τ dibagi menjadi m bagian sehingga terbentuk sebanyak $M + 1$ titik.

Penerapan metode *Crank-Nicolson* untuk menentukan nilai $U(X, \tau)$ di titik $U_i^{j+1/2}$ diperoleh dari rata-rata nilai di titik U_i^{j+1} dan U_i^j:

$$U(X, \tau) = \frac{U_i^{j+1} + U_i^j}{2} \tag{4.64}$$

Untuk menentukan turunan pertama $U(X, \tau)$ terhadap τ digunakan pendekatan beda maju yaitu:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta\tau} \tag{4.65}$$

Turunan pertama $U(X, \tau)$ terhadap X diperoleh dari rata-rata nilai pada waktu j dan $j+1$:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2\Delta X} + \frac{U_{i+1}^{j} - U_{i-1}^{j}}{2\Delta X}\right] \quad (4.66)$$

Sedangkan turunan kedua $U(X, \tau)$ terhadap X:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_{i}^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{\Delta X^2} + \frac{U_{i+1}^{j} - 2U_{i}^{j} + U_{i-1}^{j}}{\Delta X^2}\right]. \quad (4.67)$$

Substitusi $\frac{\partial U}{\partial t}$, $\frac{\partial U}{\partial X}$ dan $\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$ pada persamaan (4.66) sampai (4.69) ke dalam persamaan *Black-Scholes* non-dimensional (4.27) :

$$-\frac{\partial U}{\partial \tau} + X^2\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (\alpha - \beta)X\frac{\partial U}{\partial X} - \alpha U = 0.$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} -\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta \tau} &+ X^2\frac{1}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_{i}^{j+1} + U_{j-1}^{j+1}}{\Delta X^2} + \frac{U_{i+1}^{j} - 2U_{i}^{j} + U_{i-1}^{j}}{\Delta X^2}\right] \\ &+(\alpha-\beta)X\frac{1}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2\Delta X} + \frac{U_{i+1}^{j} - U_{i-1}^{j}}{2\Delta X}\right] - \alpha\left[\frac{U_i^{j+1} + U_i^j}{2}\right] = 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Kedua ruas dikali dengan $\Delta\tau$ sedangkan $i = \frac{X}{\Delta X}$:

$$\begin{aligned} &U_{i-1}^{j+1}\left[\frac{\Delta\tau i^2}{2} - \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4}\right] + U_i^{j+1}\left[-1 - \frac{\Delta\tau i^2 2}{2} - \frac{\alpha\Delta\tau}{2}\right] + \\ &U_{i+1}^{j+1}\left[\frac{\Delta\tau i^2}{2} + \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4}\right] = U_{i-1}^{j}\left[-\frac{\Delta\tau i^2}{2} + \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4}\right] + \\ &U_i^{j}\left[-1 + \frac{\Delta\tau i^2 2}{2} - \frac{\alpha\Delta\tau}{2}\right] + U_{i+1}^{j}\left[-\frac{\Delta\tau i^2}{2} - \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4}\right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Sehingga diperoleh persamaan:

$$A_iU_{i-1}^{j+1} + B_iU_i^{j+1} + C_iU_{i+1}^{j+1} = D_iU_{i-1}^{j} + E_iU_i^{j} + F_iV_{i+1}^{j} \quad (4.70)$$

dengan:

$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{\sigma \Delta\tau i^2}{4} - \frac{\Delta\tau(r-\delta)i}{4} \\
B_i &= -1 - \frac{\Delta\tau\sigma^2 i^2}{2} - \frac{\Delta\tau r}{2} \\
C_i &= \frac{\sigma \Delta\tau i^2}{4} + \frac{\Delta\tau(r-\delta)i}{4} \\
D_i &= -\frac{\sigma \Delta\tau i^2}{4} + \frac{\Delta\tau(r-\delta)i}{4} \\
E_i &= -1 + \frac{\sigma^2 \Delta\tau i^2}{2} + \frac{r\Delta\tau}{2} \\
F_i &= -\frac{\sigma \Delta\tau i^2}{4} - \frac{\Delta\tau(r-\delta)i}{4}.
\end{aligned}
$$

Untuk $i = 1, 2, 3, ..., N-1$

$$
\begin{aligned}
&i=1 && : A_1U_0^{j+1} + B_1U_1^{j+1} + C_1U_2^{j+1} = D_1U_0^j + E_1U_1^j + F_1U_2^j \\
&i=2 && : A_2U_1^{j+1} + B_2U_2^{j+1} + C_2U_3^{j+1} = D_2U_1^j + E_2U_2^j + F_2U_3^j \\
&i=3 && : A_3U_2^{j+1} + B_3U_3^{j+1} + C_3U_4^{j+1} = D_3U_2^j + E_3U_3^j + F_3U_4^j \\
&\vdots \\
&i=N-1 && : A_{N-1}U_{N-2}^{j+1} + B_{N-1}U_{N-1}^{j+1} + C_{N-1}U_N^{j+1} = D_{N-1}U_{N-2}^j + E_{N-1}U_N^j + \\
& && \quad F_{N-1}U_N^j. \qquad (4.71)
\end{aligned}
$$

Matriks yang dapat di bentuk berdasarkan (4.72) sebagai berikut:

$$
\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & ... & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & ... & 0 \\ ... & A_3 & B_3 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & B_{N-1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \\ U_3^{j+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} A_1U_0^{j+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ C_{N-1}U_N^{j+1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} E_1 & F_1 & 0 & ... & 0 \\ D_2 & E_2 & F_2 & ... & 0 \\ ... & D_3 & E_3 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & E_{N-1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_1^j \\ U_2^j \\ U_3^j \\ \vdots \\ U_{N-1}^j \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} D_1U_0^j \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ F_{N-1}U_N^j \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & ... & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & ... & 0 \\ ... & A_3 & B_3 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & B_{N-1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \\ U_3^{j+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} E_1 & F_1 & 0 & ... & 0 \\ D_2 & E_2 & F_2 & ... & 0 \\ ... & D_3 & E_3 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & E_{N-1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_1^j \\ U_2^j \\ U_3^j \\ \vdots \\ U_{N-1}^j \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} D_1U_0^j - A_1U_0^{j+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ F_{N-1}U_N^j - C_{N-1}U_N^j \end{bmatrix}
$$

Matriks membentuk persamaan linier:

$$
GU_i^{j+1} = HU_i^j + J. \qquad (4.72)
$$

Matriks yang berada diruas kanan yaitu $HU_i^j + J$ disebut (*right hand set*) dalam SOR. Persamaan 4.72 disederhanakan menjadi:

$$GU_i^{j+1} = K \tag{4.73}$$

K adalah rhs *(right hand side)* atau ruas kanan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$K = HU_i^j + J. \tag{4.74}$$

Untuk menentukan nilai *American call option* terhadap harga saham dan waktu pada U_i^{j+1} dengan $i = 1, 2, ..., N$ dilakukan metode iterasi. Dalam hal ini digunakan SOR untuk mempercepat iterasi. Rumus iterasi merujuk pada persamaan 2.25 yang disesuaikan untuk bentuk persamaan 4.47 dituliskan sebagai berikut :

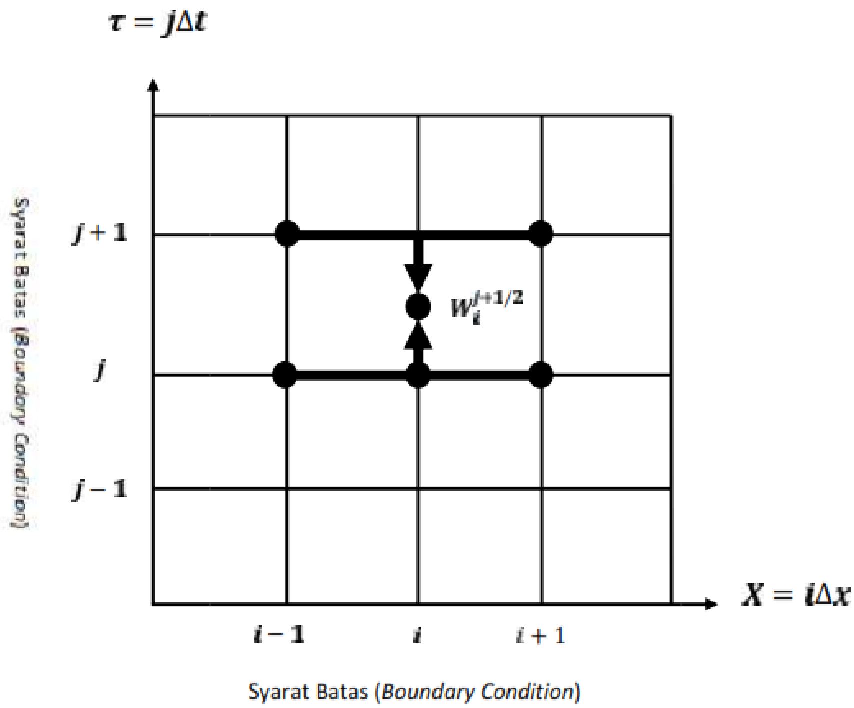
$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{\omega}{G_{i,i}} \left(K_i - \sum_{h=1}^{i-1} G_{i,h} U_i^{(j+1)} - \sum_{h=i}^{N} G_{i,h} U_i^{(j)} \right). \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned}
i &= 1 &:\ & U_1^{j+1} = U_1^j + \frac{\omega}{A_{11}} \left(K_1 - 0 - B_1 U_1^j - C_1 U_2^j \right) \\
&&& U_1^{j+1} = U_1^j + \frac{\omega}{A_{11}} \left(K_1 - (B_1 U_1^j + C_1 U_2^j) \right) \\
i &= 2 &:\ & U_2^{j+1} = U_i^j + \frac{\omega}{A_{22}} \left(K_2 - A_2 U_1^{j+1} - B_2 U_2^j - C_2 U_3^j \right) \\
&&& U_2^{j+1} = U_2^j + \frac{\omega}{A_{22}} \left(K_2 - A_2 U_1^{j+1} - (B_2 U_2^j + C_2 U_3^j) \right) \\
i &= 3 &:\ & U_3^{j+1} = U_3^j + \frac{\omega}{A_{33}} \left(K_3 - A_3 U_2^{j+1} - B_3 U_3^j + C_3 U_4^j \right) \\
&&& U_3^{j+1} = U_3^j + \frac{\omega}{A_{33}} \left(K_3 - A_3 U_2^{j+1} - (B_3 U_3^j + C_3 U_4^j) \right) \\
&\vdots \\
i &= N-1 &:\ & U_{N-1}^{j+1} = U_{N-1}^i + \frac{\omega}{A_{N-1N-1}} \left(K_{N-1} - A_N U_{N-2}^{j+1} - B_{N-1} U_{N-1}^j - C_{N-1} U_N^j \right) \\
&&& U_{N-1}^{j+1} = U_{N-1}^i + \frac{\omega}{A_{N-1N-1}} \left(K_{N-1} - A_N U_{N-2}^{j+1} - (B_{N-1} W_{N-1}^j + C_{N-1} U_N^j) \right).
\end{aligned}$$

Kemungkinan *exercise* yang bisa terjadi selama masa kontrak terjadi ketika nilai *American call option* tidak boleh kurang dari *payoff* :

$$
\begin{aligned}
U_1^{j+1} &= \max\left(g_1, U_i^j + \frac{\omega}{B_1}\left(K_1 - (B_1U_1^j + C_1U_2^j)\right)\right) \\
U_2^{j+1} &= \max\left(g_2, U_2^j + \frac{\omega}{B_2}\left(K_2 - A_2U_1^{j+1} - (B_2U_2^j + C_2U_2^j)\right)\right) \\
U_3^{j+1} &= \max\left(g_3, U_3^j + \frac{\omega}{B_3}\left(K_3 - A_3U_2^{j+1} - (B_3U_3^j + C_4U_4^j)\right)\right) \\
&\vdots \\
U_{N-1}^{j+1} &= \max\left(g_3, U_{N-1}^i + \frac{\omega}{a_{N-1}}\left(K_{N-1} - A_NU_{N-2}^{j+1} - (B_{N-1}U_{N-1}^j + C_{N-1}U_N^j)\right)\right).
\end{aligned}
$$

4.4.2 Metode Crank-Nicolson untuk stock loan



Gambar 4.2: Grid *Stock Loan*

Dalam penelitian ini kita akan mengamati nilai *American call option* dan *stock loan*. Oleh karena perhitungan secara numerik juga dilakukan pada persamaan diferensial untuk *stock loan*. Gambar 4.2 merupakan grid untuk menyelesaikan Persamaan differensial *Black-Scholes* untuk *stock loan* menggunakan metode *Crank-Nicolson*. Harga saham terletak pada domain X yang setiap titiknya memiliki indeks i sehingga $X = i\Delta X$ dengan $i = 0, 1, 2, 3, ..., N$. Domain X dibagi menjadi N bagian sehingga terbentuk sebanyak $N + 1$ titik. Waktu terletak pada domain τ yang setiap titiknya memiliki indeks j sehingga $\tau = j\Delta\tau$ dengan $j = 0, 1, 2, 3, ..., M$. Domain τ dibagi menjadi M bagian sehingga terbentuk sebanyak $M + 1$ titik.

Penerapan metode *Crank-Nicolson* untuk menentukan nilai $W(X, \tau)$ di titik $W_i^{j+1/1}$ diperoleh dari rata-rata nilai di titik W_i^{j+1} dan W_i^j:

$$W(X, \tau) = \frac{W_i^{j+1} + W_i^j}{2} \tag{4.76}$$

Untuk menentukan turunan pertama $W(X, \tau)$ terhadap τ digunakan pendekatan beda maju yaitu:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{W_i^{j+1} - W_i^j}{\Delta\tau} \tag{4.77}$$

Turunan pertama $W(X, \tau)$ terhadap X diperoleh dari rata-rata nilai pada waktu j dan $j + 1$:

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{1}{2}\left[\frac{W_{i+1}^{j+1} - W_{i-1}^{j+1}}{2\Delta X} + \frac{W_{i+1}^{j} - W_{i-1}^{j}}{2\Delta X}\right] \tag{4.78}$$

Sedangkan turunan kedua $W(X, \tau)$ terhadap X:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{W_{i+1}^{j+1} - 2W_i^{j+1} + W_{i-1}^{j+1}}{\Delta X^2} + \frac{W_{i+1}^{j} - 2W_i^{j} + W_{i-1}^{j}}{\Delta X^2}\right]. \tag{4.79}$$

Substitusikan $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial W}{\partial X}$ dan $\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$ pada Persamaan 4.77 sampai 4.79 ke dalam persamaan *Black-Scholes* non-dimensi 4.28 :

$$-\frac{\partial W}{\partial \tau} + X^2\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + (\alpha - \beta)X\frac{\partial W}{\partial X} - \alpha W = 0$$

Diperoleh:

$$-\frac{W_j^{i+1} - W_j^i}{\Delta\tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{1}{2}\left[\frac{W_{j+1}^{i} - 2W_j^{i} + W_{j-1}^{i}}{\Delta X^2} + \frac{W_{j+1}^{i+1} - 2W_j^{i+1} + W_{j-1}^{i+1}}{\Delta X^2}\right]$$

$$+ (\alpha - \beta)X\frac{1}{2}\left[\frac{W_{j+1}^{i} - W_{j-1}^{i}}{2\Delta X} + \frac{W_{j+1}^{i+1} - W_{j-1}^{i+1}}{2\Delta X}\right] - \alpha\frac{1}{2}\left[W_j^{i+1} + W_j^i\right] = 0$$

Kedua ruas dikalikan $\dfrac{1}{\Delta\tau}$ sedangkan $i = \dfrac{X}{\Delta X}$:

$$\begin{aligned} W_{i-1}^{j+1}\left[\frac{\Delta\tau i^2}{2} - \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4}\right] + W_i^{j+1}\left[-1 - \frac{\Delta\tau i^2 2}{2} - \frac{\alpha\Delta\tau}{2}\right] + \\ W_{i+1}^{j+1}\left[\frac{\Delta\tau i^2}{2} + \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4}\right] = W_{i-1}^{j}\left[-\frac{\Delta\tau i^2}{2} + \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4}\right] + \\ W_i^{j}\left[-1 + \frac{\Delta\tau i^2 2}{2} - \frac{\alpha\Delta\tau}{2}\right] + W_{i+1}^{j}\left[-\frac{\Delta\tau i^2}{2} - \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4}\right] \end{aligned} \qquad (4.80)$$

Persamaan 4.80 diarahkan membentuk persamaan:

$$a_i W_{j-1}^{j+1} + b_i W_j^{j+1} + c_i W_{i+1}^{j+1} = d_i W_{i-1}^{j} + e_i W_i^{j} + f_i W_{i+1}^{j} \qquad (4.81)$$

dengan:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\Delta\tau i^2}{2} - \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4} \\ b_i &= -1 - \frac{\Delta\tau i^2 2}{2} - \frac{\alpha\Delta\tau}{2} \\ c_i &= \frac{\Delta\tau i^2}{2} + \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4} \\ d_i &= -\frac{\Delta\tau i^2}{2} + \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4} \\ e_i &= -1 + \frac{\Delta\tau i^2 2}{2} + \frac{\alpha\Delta\tau}{2} \\ f_i &= -\frac{\Delta\tau i^2}{2} - \frac{\Delta\tau(\alpha-\beta)i}{4}. \end{aligned}$$

Untuk $i = 1, 2, 3, ...N-1$

$$\begin{aligned} i &= 1 && : a_1 W_0^{j+1} + b_1 W_1^{j+1} + c_1 W_2^{j+1} = d_1 W_0^j + e_1 W_1^j + f_1 W_2^j \\ i &= 2 && : a_2 W_1^{j+1} + b_2 W_2^{j+1} + c_2 W_3^{j+1} = d_2 W_1^j + e_2 W_2^j + f_2 W_3^j \\ i &= 3 && : a_3 W_2^{j+1} + b_3 W_3^{j+1} + c_3 W_4^{j+1} = d_3 W_2^j + e_3 W_3^j + f_3 W_4^j \\ &\vdots \\ i &= N-1 && : a_{N-1} W_{N-2}^{j+1} + b_{N-1} W_{N-1}^{j+1} + c_N W_N^{j+1} = d_{N-1} W_{N-2}^j + \\ &&& \quad e_{N-1} W_{N-1}^j + f_{N-1} W_N^j \end{aligned} \qquad (4.82)$$

Matriks yang dapat di bentuk berdasarkan 4.81 dan 4.82 sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^{j+1} \\ W_2^{j+1} \\ W_3^{j+1} \\ \vdots \\ W_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 W_0^{j+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_{N-1} W_N^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & \dots & 0 \\ d_2 & e_2 & f_2 & \dots & 0 \\ \dots & d_3 & e_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^j \\ W_2^j \\ W_3^j \\ \vdots \\ W_{N-1}^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 W_0^j \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_{n-1} W_N^j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^{j+1} \\ W_2^{j+1} \\ W_3^{j+1} \\ \vdots \\ W_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & \dots & 0 \\ d_2 & e_2 & f_2 & \dots & 0 \\ \dots & d_3 & e_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^j \\ W_2^j \\ W_3^j \\ \vdots \\ W_{N-1}^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 W_0^j + a_1 W_0^{j+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_{N-1} W_N^j + c_{N-1} W_N^j \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut membentuk persamaan linier:

$$PW_i^{j+1} = QW_i^j + R. \tag{4.83}$$

Persamaan (4.82) disederhanakan menjadi:

$$PW_i^{j+1} = S \tag{4.84}$$

S adalah rhs *(right hand side)* atau matriks ruas kanan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S = QW_i^j + R. \tag{4.85}$$

Untuk menentukan nilai *Stock loan* terhadap harga saham dan variabel waktu pada W_i^{j+1} dengan $i = 1, 2, ..., N$ dilakukan metode iterasi. Dalam tesis ini digunakan SOR untuk mempercepat iterasi. Rumus iterasi merujuk pada persamaan 2.25 yang disesuaikan untuk bentuk persamaan 4.84 dituliskan sebagai berikut :
sebagai berikut :

$$W_i^{j+1} = W_i^j + \frac{\omega}{P_{i,i}} \left(S_i - \sum_{h=1}^{i-1} P_{i,h} W_i^{(j+1)} - \sum_{h=i}^{N} P_{i,h} W_i^{(j)} \right). \tag{4.86}$$

$$
\begin{aligned}
i &= 1 \quad : W_1^{j+1} = W_1^j + \frac{\omega}{a_{11}}\left(S_1 - 0 - b_1 W_1^j - c_1 W_2^j\right)\\
&\qquad W_1^{j+1} = W_1^j + \frac{\omega}{a_{11}}\left(S_1 - (b_1 W_1^j + c_1 W_2^j)\right)\\
i &= 2 \quad : W_2^{j+1} = W_i^j + \frac{\omega}{a_{22}}\left(S_2 - a_2 W_1^{j+1} - b_2 W_2^j - c_2 W_3^j\right)\\
&\qquad W_2^{j+1} = W_2^j + \frac{\omega}{a_{22}}\left(S_2 - a_2 W_1^{j+1} - (b_2 W_2^j + c_2 W_3^j)\right)\\
i &= 3 \quad : W_3^{j+1} = W_3^j + \frac{\omega}{a_{33}}\left(S_3 - a_3 W_2^{j+1} - b_3 W_3^j + c_3 W_4^j\right)\\
&\qquad W_3^{j+1} = W_3^j + \frac{\omega}{a_{33}}\left(S_3 - a_3 W_2^{j+1} - (b_3 W_3^j + c_3 W_4^j)\right)\\
&\vdots\\
i &= N-1 : W_{N-1}^{j+1} = W_{N-1}^i + \frac{\omega}{a_{N-1N-1}}\left(S_{N-1} - a_N W_{N-2}^{j+1} - b_{N-1} W_{N-1}^j - c_{N-1} W_N^j\right)\\
&\qquad W_{N-1}^{j+1} = W_{N-1}^i + \frac{\omega}{a_{N-1N-1}}\left(S_{N-1} - a_N W_{N-2}^{j+1} - (b_{N-1} W_{N-1}^j + c_{N-1} U_N^j)\right).
\end{aligned}
$$

Kemungkinan *exercise* yang bisa terjadi selama masa kontrak terjadi ketika nilai *stock loan* tidak boleh kurang dari *payoff*:

$$
\begin{aligned}
W_1^{j+1} &= \max\left(g_1, W_1^j + \frac{\omega}{b_1}\left(S_1 - (b_1 W_1^j + c_1 W_2^j)\right)\right)\\
W_2^{j+1} &= \max\left(g_2, W_2^j + \frac{\omega}{b_2}\left(S_2 - a_2 W_1^{j+1} - (b_2 W_2^j + c_2 W_2^j)\right)\right)\\
W_3^{j+1} &= \max\left(g_3, W_3^j + \frac{\omega}{b_3}\left(S_3 - a_3 W_2^{j+1} - (b_3 W_3^j + c_4 W_4^j)\right)\right)\\
&\vdots\\
W_{N-1}^{j+1} &= \max\left(g_{N-1}, W_{N-1}^i + \frac{\omega}{a_{N-1}}\left(S_{N-1} - a_N W_{N-2}^{j+1} - (b_{N-1} W_{N-1}^j + c_{N-1} W_N^j)\right)\right).
\end{aligned}
$$

4.5 Hasil perhitungan

Perhitungan secara numerik dilakukan untuk menentukan nilai *American call option* maupun *stock loan*. Sebagai input diambil contoh parameter dari data saham PT. BUMI, Tbk. (BUMI) selam tiga tahun mulai 01 januari 2003 sampai 29 Desember 2005. Adapun alasan memilih data saham PT. Bumi tahun 2003 sampai 2005 karena memiliki tingkat keberagaman data yang cukup signifikan dengan tingkat *volatility* (σ) sebesar 0,34. Tingkat suku bunga bank diperoleh dari data Indonesia sedangkan tingkat suku bunga pinjaman untuk kredit investasi bank umum diperoleh dari data Badan Pusat Statistik. Simulasi *American call option* dilakukan dengan mengambil tiga parameter yang berbeda untuk masing-masing suku bunga bank, dividen dan *maturity date*. Simulasi *stock loan* dilakukan dengan tiga parameter yang berbeda untuk masing-masing suku bunga bank, dividen, *maturity date* dan dua paremeter yang berbeda untuk suku bunga pinjaman.

4.5.1 Hasil Simulasi American call option

Sesuai dengan data saham PT. Bumi, Tbk., simulasi *American call option* secara numerik menggunakan *volatility* (σ) sebesar $0,34$. Banyaknya hari perdagangan selama satu tahun yaitu 744 sehingga pembagian grid ditentukan $N = 744$.

Hasil simulasi numerik yang disajikan pada Tabel 4.1 menunjukkan bahwa nilai *American call option* terhadap harga saham non dimensional dipengaruhi oleh tingkat suku bunga bank, besarnya dividen dan lama jangka waktu kontrak (*maturity date*). Kenaikan tingkat suku bunga bank menyebabkan kenaikan nilai *American call option*. Ketika tingkat suku bunga bank mengalami kenaikan menyebabkan banyak investor tertarik untuk membeli saham. Karena banyaknya permintaan saham di pasar modal menyebabkan nilai *American call option* semakin besar.

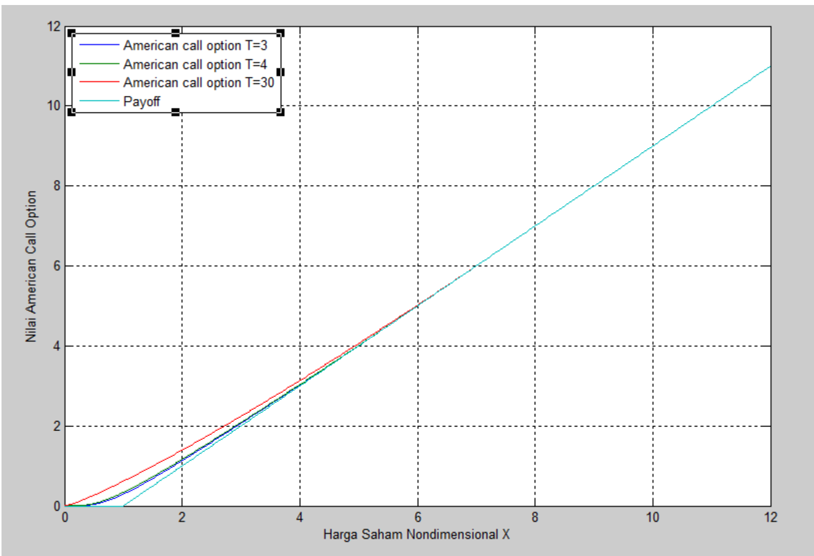
Jangka waktu kontrak (*maturity date*) juga mempengaruhi nilai *American call option*. semakin lama jangka waktu kontrak nilai *American call option* semakin besar. Masa kontrak yang lebih lama memberikan kebebasan kepada *holder* untuk memilih waktu *exercise*. Hal ini yang menyebabkan *American call option* dengan maturity date yang lama semakin bernilai dibandingkan dengan *American call option* dengan jangka waktu kontrak yang singkat. Pengaruh *maturity date* terhadap nilai *American call option* bisa dijadikan pertimbangan oleh investor untuk menentukan perjanjian masa berakhirnya kontrak.

Berbeda dengan dividen, semakin besar dividen menyebabkan nilai *American call option* semakin kecil. Ketika perusahaan penerbit saham menambah besar dividen investor beranggapan bahwa modal yang dimiliki perusahaan semakin berkurang sehingga tidak banyak investor yang inggin membeli saham. Kondisi ini menyebabkan nilai *American call option* menurun.

Tabel 4.1: Hasil Simulasi *American Call Option*

Suku Bunga Bank (r)	Dividen (δ)	Harga Saham (X)	Nilai *American Call Option*			*Payoff*
			T=3	T=4	T=30	
0,085	0,02	1,01	0,30	0,34	0,62	0,01
		1,10	0,36	0,40	0,68	0,10
		1,20	0,43	0,48	0,76	0,20
		1,35	0,56	0,61	0,88	0,35
	0,03	1,01	0,28	0,32	0,54	0,01
		1,10	0,33	0,37	0,59	0,10
		1,20	0,40	0,44	0,66	0,20
		1,35	0,53	0,57	0,78	0,35
	0,08	1,01	0,20	0,22	0,30	0,01
		1,10	0,26	0,27	0,35	0,10
		1,20	0,31	0,33	0,41	0,20
		1,35	0,43	0,44	0,51	0,35
0,10	0,02	1,01	0,32	0,37	1,65	0,01
		1,10	0,38	0,43	0,71	0,10
		1,20	0,45	0,50	0,78	0,20
		1,35	0,58	0,63	0,91	0,35
	0,03	1,01	0,30	0,34	0,56	0,01
		1,10	0,35	0,40	0,62	0,10
		1,20	0,43	0,47	0,69	0,20
		1,35	0,55	0,59	0,81	0,35
	0,08	1,01	0,21	0,24	0,32	0,01
		1,10	0,26	0,28	0,37	0,10
		1,20	0,32	0,35	0,43	0,20
		1,35	0,44	0,46	0,53	0,35
0,12	0,02	1,01	0,34	0,40	1,68	0,5
		1,10	0,40	0,46	0,74	0,10
		1,20	0,48	0,54	0,81	0,20
		1,35	0,62	067	0,94	0,35
	0,03	1,01	0,32	0,37	0,59	0,5
		1,10	0,38	0,43	0,65	0,10
		1,20	0,45	0,50	0,72	0,20
		1,35	0,58	0,63	0,84	0,35
	0,08	1,01	0,23	0,26	0,32	0,5
		1,10	0,28	0,30	0,37	0,10
		1,20	0,34	0,37	0,43	0,20
		1,35	0,46	0,48	0,53	0,35

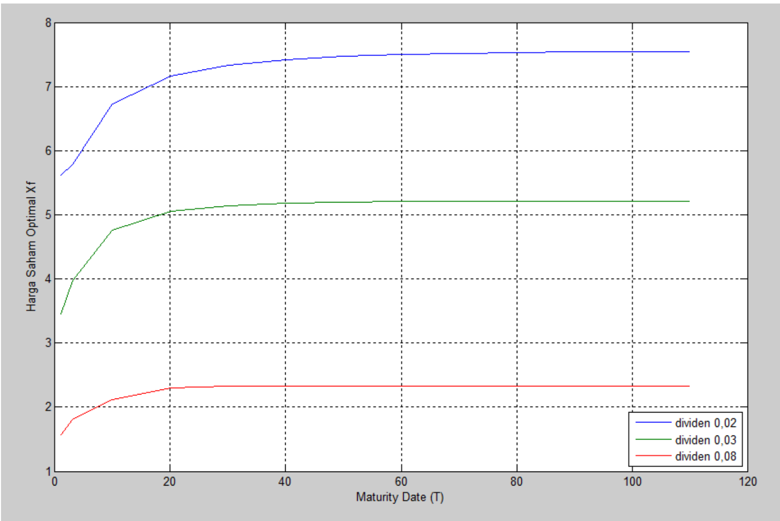
Gambar 4.3 merupakan hasil simulasi numerik *American call option* yang disajikan dalam bentuk grafik. Pada grafik dapat dilihat bahwa semakin lama jangka waktu kontrak semakin besar nilai *American call option*.



Gambar 4.3: Grafik *American call option* dengan $r = 0,085$, $\delta = 0,02$

Harga saham optimal *American call option* merupakan harga saham ketika nilai *payoff* sama dengan nilai *American call option*. Pada Gambar 4.3 harga saham optimal terjadi ketika grafik nilai *American call option* bertemu dengan grafik *payoff*.

Perilaku asimtotik harga saham optimal *American call option* secara visual diperoleh dari simulasi numerik menggunakan beberapa T mulai T yang kecil ($T = 1$) sampai T yang besar ($T = 110$). Perilaku asimtotik *American call option* terhadap T berdasarkan simulasi numerik secara visual dapat dilihat pada Gambar 4.4. Perilaku asimtotik dari harga saham optimal *American call option* memiliki kecenderungan mendekati nilai konstan untuk maturity date (T) menuju tak hingga. Besarnya dividen juga berpengaruh terhadap harga saham optimal *American call option*. Tampak pada Gambar 4.4 semakin besar dividen menyebabkan harga saham optimal semakin menurun.



Gambar 4.4: Perilaku Asimtotik *American call option* dengan $r = 0,085$,

Tabel 4.2 merupakan nilai optimal *American call option* yang diselesaikan secara numerik menggunakan metode Crank-Nicolson dan diselesaikan secara analitik. Hasil perhitungan harga saham optimal secara numerik menunjukkan hasil yang tidak jauh berbeda dengan hasil yang diperoleh secara analitik. Hal ini menunjukkan bahwa harga saham optimal yang diperoleh dari perhitungan numerik memiliki sifat yang sama seperti harga saham optimal dari hasil perhitungan secara analitik.

Tabel 4.2: Harga Saham Optimal *American Call Option*

Suku Bunga Bank (r)	Dividen (δ)	Crank Nicolson	Analitik
0,085	0,02	7,54	7,57
	0,03	5,20	5,21
	0,08	2,32	2,33
0,10	0,02	8,25	8,28
	0,03	5,66	5,67
	0,08	2,46	2,47
0,12	0,02	9,20	9,24
	0,03	6,29	6,39
	0,08	2,65	2,66

4.5.2 Hasil Simulasi Stock Loan

Simulasi *stock loan* menggunakan parameter dividen *volatility* (σ) sebesar $0,34$. Pembagian grid disesuaikan dengan data banyaknya hari perdagangan selama satu tahun yaitu 744 sehingga $N = 744$. Hasil simulasi mencari nilai *stock loan* terhadap harga saham yang diselesaikan secara numerik dengan metode Crank-Nicolson disajikan dalam Tabel 4.3.

Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa nilai *stock loan* dipengaruhi oleh tingkat suku bunga bank, besarnya dividen dan lama jangka waktu kontrak (*maturity date*). Kenaikan tingkat suku bunga bank menyebabkan kenaikan harga saham sehingga ketika melakukan pelunasan *borrower* memperoleh pengembalian. Hal ini menyebabkan nilai *stock loan* semakin meningkat.

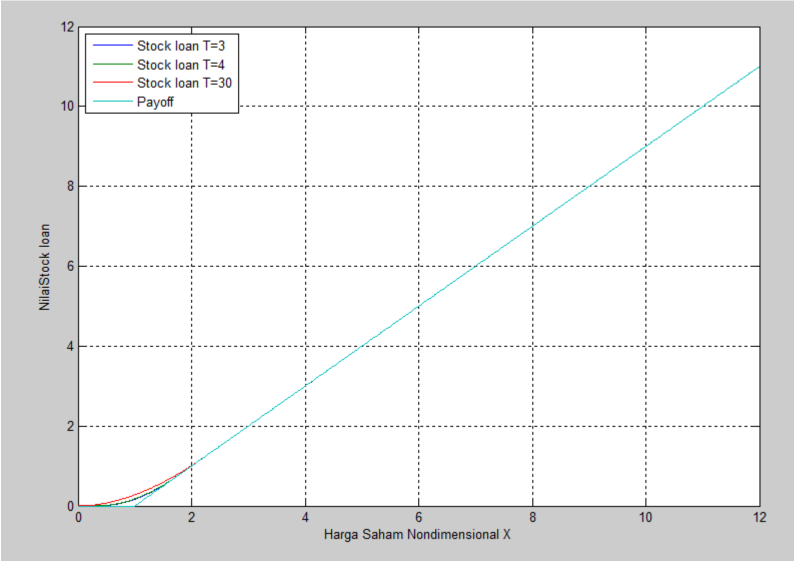
Jangka waktu kontrak (*maturity date*) juga mempengaruhi nilai *stock loan*. semakin lama jangka waktu kontrak nilai *stock loan* semakin besar. Masa kontrak yang lebih lama memberikan kebebasan kepada *borrower* untuk menentukan waktu *exercise*. Selain itu *borrower* lebih suka apabila meminjam uang dengan jangka waktu pelunasan yang lebih panjang. Alasan tersebut menyebabkan *stock loan* dengan *maturity date* yang lama semakin bernilai dibandingkan dengan *stock loan* dengan *maturity date* yang singkat. Pengaruh *maturity date* terhadap nilai *stock loan* bisa dijadikan pertimbangan oleh *borrower* untuk menentukan perjanjian jangka waktu pelunasan pinjaman.

Berbeda dengan dividen, semakin besar dividen menyebabkan nilai *stock loan* semakin kecil. Ketika perusahaan penerbit saham menambah besar dividen investor beranggapan bahwa modal yang dimiliki perusahaan semakin berkurang sehingga tidak banyak investor yang inggin membeli saham. Kondisi ini menyebabkan nilai *stock loan* menurun.

Tabel 4.3: Hasil Simulasi *Stock Loan*

Suku Bunga Bank (r)	Suku Bunga Pinjaman (γ)	Dividen (δ)	harga saham (X)	Nilai Stock Loan			*Payoff*
				T=3	T=4	T=30	
0,085	0,14	0,02	1,01	0,17	0,18	0,28	0,01
			1,10	0,22	0,24	0,43	0,10
			1,20	0,29	0,30	0,39	0,20
			1,35	0,39	0,40	0,49	0,35
		0,03	1,01	0,16	0,17	0,25	0,5
			1,10	0,22	0,23	0,30	0,10
			1,20	0,28	0,29	0,35	0,20
			1,35	0,38	0,39	0,45	0,35
		0,08	1,01	0,13	0,14	0,15	0,01
			1,10	0,18	0,18	0,20	0,10
			1,20	0,24	0,25	0,26	0,20
			1,35	0,35	0,36	0,37	0,35
	0,17	0,02	1,01	0,15	0,16	0,22	0,5
			1,10	0,21	0,22	0,28	0,10
			1,20	0,27	0,28	0,33	0,20
			1,35	0,37	0,38	0,43	0,35
		0,03	1,01	0,15	0,16	0,20	0,01
			1,10	0,20	0,21	0,25	0,10
			1,20	0,26	0,27	0,30	0,20
			1,35	0,37	0,38	0,40	0,35
		0,08	1,01	0,11	0,12	0,13	0,01
			1,10	0,16	0,17	0,18	0,10
			1,20	0,23	0,24	0,25	0,20
			1,35	0,35	0,36	0,37	0,35
0,10	0,14	0,02	1,01	0,32	0,37	0,65	0,01
			1,10	0,39	0,44	0,72	0,10
			1,20	0,47	0,52	0,79	0,20
			1,35	0,58	0,63	0,91	0,35
		0,03	1,01	0,30	0,34	0,57	0,01
			1,10	0,37	0,41	0,63	0,10
			1,20	0,44	0,48	0,70	0,20
			1,35	0,55	0,59	0,81	0,35
		0,08	1,01	0,21	0,24	0,32	0,01
			1,10	0,27	0,29	0,38	0,10
			1,20	0,39	0,36	0,41	0,20
			1,35	0,44	0,46	0,53	0,35
	0,17	0,02	1,01	0,32	0,37	0,65	0,01
			1,10	0,39	0,44	0,72	0,10
			1,20	0,46	0,52	0,79	0,20
			1,35	0,58	0,63	0,91	0,35
		0,03	1,01	0,30	0,34	0,56	0,01
			1,10	0,36	0,41	0,63	0,10
			1,20	0,44	0,48	0,70	0,20
			1,35	0,55	0,59	0,81	0,35
		0,08	1,01	0,21	0,24	0,32	0,01
			1,10	0,27	0,29	0,38	0,10
			1,20	0,33	0,36	0,44	0,20
			1,35	0,44	0,46	0,53	0,35
0,12	0,14	0,02	1,01	0,34	0,40	0,68	0,5
			1,10	0,42	0,47	0,75	0,10
			1,20	0,49	0,55	0,83	0,20
			1,35	0,62	0,67	0,94	0,35
		0,03	1,01	0,32	0,37	0,59	0,5
			1,10	0,39	0,44	0,66	0,10
			1,20	0,47	0,51	0,73	0,20
			1,35	0,58	0,63	0,84	0,35
		0,08	1,01	0,23	0,26	0,35	0,01
			1,10	0,29	0,32	0,40	0,10
			1,20	0,35	0,38	0,46	0,20
			1,35	0,46	0,48	0,56	0,35
	0,17	0,02	1,01	0,47	0,42	0,68	0,01
			1,10	0,24	0,47	0,75	0,10
			1,20	0,49	0,55	0,83	0,20
			1,35	0,62	0,67	0,94	0,35
		0,03	1,01	0,32	0,37	0,59	0,01
			1,10	0,39	0,44	0,66	0,10
			1,20	0,47	0,51	0,73	0,20
			1,35	0,58	0,63	0,84	0,35
		0,08	1,01	0,23	0,26	0,35	0,01
			1,10	0,29	0,31	0,40	0,10
			1,20	0,35	0,38	0,46	0,20
			1,35	0,46	0,48	0,56	0,35

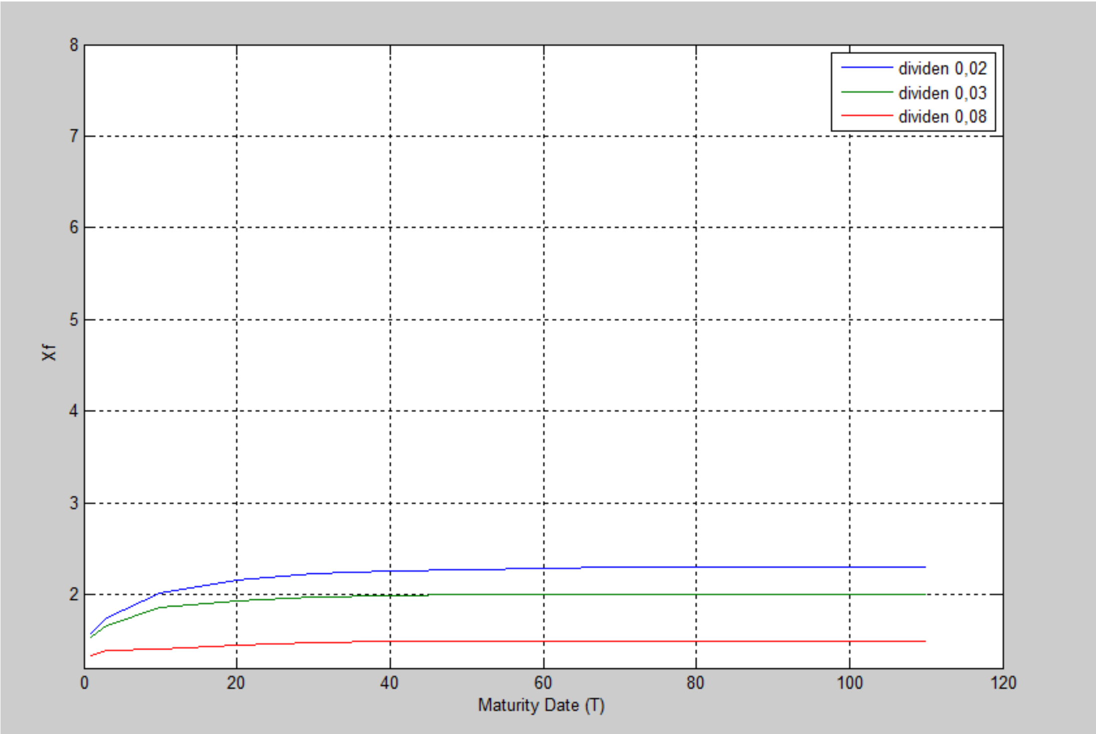
Gambar 4.5 merupakan hasil simulasi numerik *stock loan* yang disajikan dalam bentuk grafik. Pada Gambark 4.3 dapat dilihat bahwa semakin lama jangka waktu pelunasan pinjaman semakin besar nilai *stock loan*.



Gambar 4.5: Grafik *Stock loan* dengan $r = 0,085$, $\delta = 0.02$

Harga saham optimal *stock loan* merupakan harga saham ketika *payoff* sama dengan nilai *stock loan*. Pada Gambar 4.3 harga saham optimal terjadi ketika grafik nilai *stock loan* bertemu dengan grafik *payoff*. Perilaku asimtotik harga saham optimal *stock loan* dapat dilihat pada Gambar 4.4. Perilaku asimtotik dari harga saham optimal *stock loan* memiliki kecenderungan mendekati nilai konstan untuk maturity date (T) menuju tak hingga. Besarnya dividen juga berpengaruh terhadap harga saham optimal *stock loan*. Tampak pada Gambar 4.6 semakin besar dividen menyebabkan harga saham optimal semakin menurun.

Perilaku asimtotik *stock loan* diperoleh dari simulasi numerik menentukan nilai optimal *stock loan* dari menggunakan T yang kecil sampai T yang besar. Perilaku asimtotik *stock loan* dapat dilihat pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6: Grafik Asimtotik *Stock Loan* dengan $r = 0,085$, $\gamma = 0,1$, $\delta = 0,02$, $\delta = 0,03$, $\delta = 0,04$

Tabel 4.4 merupakan nilai optimal *stock loan* yang diselesaikan secara numerik menggunakan metode Crank-Nicolson dan diselesaikan secara analitik. Hasil perhitungan harga saham optimal secara numerik menunjukkan hasil yang tidak jauh berbeda dengan hasil yang diperoleh secara numerik. Hal ini menunjukkan bahwa harga saham optimal yang diperoleh dari perhitungan numerik memiliki sifat yang sama seperti harga saham optimal yang diperoleh secara analitik.

Tabel 4.4: Harga Saham Optimal *Stock Loan*

Suku Bunga Bank (r)	Suku Bunga Pinjaman (γ)	Dividen (δ)	Crank-Nicolson	Analitik
0,085	0,14	0,02	2,30	2,32
		0,03	2,00	2,06
		0,08	1,48	1,49
	0,17	0,02	1,87	1,88
		0,03	1,72	1,73
		0,08	1,38	1,41
0,10	0,14	0,02	2,61	2,64
		0,03	2,17	2,19
		0,08	1,50	1,54
	0,17	0,02	2,04	2,07
		0,03	1,84	1,85
		0,08	1,40	1,45
0,12	0,14	0,02	3,18	3,20
		0,03	2,51	2,52
		0,08	1,58	1,62
	0,17	0,02	2,40	2,42
		0,03	2,04	2,06
		0,08	1,47	1,51

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini, di berikan kesimpulan serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah disajikan pada bab IV, dapat disimpulkan beberapa hal burikut ini:

1. Penyelesaian numerik menghasilkan nilai *American call option* dan *stock loan* terhadap harga saham. Selain itu diproleh harga saham optimal yang dapat dijadikan acuan bagi *holder* maupun *borrower* melakukan *excercise*.

2. Berdasarkan hasil simulasi numerik nilai *American call option* maupun *stock loan* dipengaruhi oleh besar tingkat suku bunga bank, besar dividen dan lama waktu perjanjian kontrak (*maturity date*). Semakin besar suku bunga bank nilai *American call option* maupun *stock loan* semakin besar. Semakin lama maturity date semakin besar nilai *American call option* maupun *stock loan*. Sedangkan semakin besar dividen menyebabkan nilai *American call option* maupun *stock loan* semakin menurun. Perilaku asimtotik harga saham optimal *American call option* maupun *stock loan* memiliki kecenderungan bernilai konstan untuk T menuju tak hingga. Perilaku asimtotik harga saham optimal dapat dijadikan acuan oleh *borrower* yang melakukan kontrak *stock loan* ataupun *holder* yang memiliki kontrak *option* untuk menentukan *maturity date*.

3. Hasil simulasi secara numerik dengan metode Crank-Nicolson menunjukkan nilai optimal *American call option* maupun *stock loan* mendekati nilai optimal yang diselesaikan secara analitik.

5.2 Saran

1. Pada penelitian ini hanya menggunakan satu data volatility. diharapkan untuk penelitian selanjutnya digunakan volatility yang berbeda $(0,01 < \sigma < 0,1)$.

2. Pada penelitian ini harga saham maksimal yang digunakan berupa bilangan bulat, diharpkan dilakukan perbaikan program untuk harga saham berupa bilangan desimal.

3. Untuk menggambarkan perilaku asimtotik sebaikknya menggunakan T yang lebih banyak agar grafik asimtotik terlihat *smooth*.

4. Berdasarkan hasil simulasi, belum diketahui dengan pasti apakah suku bunga pinjaman berpengaruh terhadap nilai stock loan. Untuk penelitian selanjutnya bisa dikaji bagaimana pengaruh suku bunga pinjaman terhadap nilai *stock loan*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bhowmik, S.K. (2014), ”Fast and Efficient Numerical Methods for An Extended Black-Schole Model”, *Computers and Mathematics With Applications*, Vol.67, hal. 636-654.

[2] Chiarella, C dan Ziogas, A. (2004), A Survey of The Integral Representation of American Option Prices, Univrsity of Technology Sydney.

[3] Pascucci, A. (2013), ”Mathematical Analysis and Numerical Methods for a PDE Model of A Stock Loan Pricing Problem”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 403, hal. 38-53.

[4] Lu, X dan Putri, E.R.M. (2015), ”Semi-Analytic of Stock Loans With Finite Maturity”, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol. 27. hal . 206-215.

[5] Dai, M dan Xu, Z.Q.X. (2010), ”Optimal Redeeming Strategy of Stock Loans With Finite Maturity”, *Mathematical Finance*, Vol.20, No. 10, hal. 1-19.

[6] Wilmout, P. (2007), *Introduces Quantitative Finance*. John Woley and Sons, Ltd. England.

[7] Jiang, L. (2005), *Mathematical Modelling and Methods of Option Pricing*, 1^{st} edition, World Scientific, Singapore.

[8] Cook Jason. (2009), *Asymptotic Analysis of American-Style Options*. Theses for the degree of Doctor of Philosopy, University of Bath.

[9] Brandimarte, P. (2006), *Numerical Methods in Finance and Economics*. A john Willey and Son, Inc., Publication, Canada.

[10] Hull, J.C. (2014), *Option, Futures and Other Derivatives*. 7^{st} edition, Pearson Education International, New Jersey.

[11] Putri, E.R.M. (2014), ”Stock Loans Valuation”, *Research on line for Ph.D*. University of Wollonggong.

[12] Wilmott, P. (1995), *The Mathematics of Financial Derivatives*. Press Syndicate University of Cambridge.

[13] Zhu, S. (2006), ”A New Analytical Approximation Formula For The Optimal Exercise Boundary Of American Put Option”, *Jurnal of Finance* Vol. 9, No. 7, hal. 1141-1177.

[14] Xia, J dan Zhou, X.Y. (2007), Stock Loan . *Mathematical Finance* ,Vol. 17, No.2, Hal. 307-317.

[15] Lu, X dan Putri, E.R.M. (2015), ”Finite Maturity Margin Call Stock Loans”, *Operations Research Letter*, Vol. 44, hal. 12-18.

[16] http://www.idx.co.id/portals/0/saham2.jpg.

[17] Klebaner, F.C.S. (2004), *Introduction To Stochastic Calculus With Applications*. Imperial College, University Melbourne, Melbourne.

[18] Burden Richard L dan Faires J. (2010), Douglas.9^{th}edition. *Numerical Analysis*. Youngstown State University. Brooks/Cole Cengage Learning. Boston, USA.

LAMPIRAN A

Algoritma Mencari Nilai American Call Options dan Stock Loan

Input : X_{min} ; σ ; γ ; δ ; tol ; N ; T

Output : Price

Proses : t_{min}←0 ;t_{min}←0 ; X_{min}←0

Hitung : I $\leftarrow \frac{(T-T_{min})}{2}\sigma^2; dt \leftarrow (T - T_{min})/M; dx \leftarrow (X_{max} - X_{min})/N$

Vet i ← 0;N

Vet j ← 0;M

Hitung payoff :

C (:,1) ← $\max(x-1{,}0)$; Pastval← $pay\ off\ \ 2; N, 1$

Hitung : $\alpha \leftarrow \frac{2\ r-\gamma}{\sigma^2}; \beta \leftarrow \frac{2\delta}{\sigma^2}$; % untuk *American call option* $\gamma = 0$

Hitung elemen matrik : $a_i \leftarrow \frac{\Delta\tau i^2}{2} - \frac{\Delta\tau\ \alpha-\beta\ i}{4}$

$$b_i \leftarrow 1 - \Delta\tau i^2 - \frac{\alpha\Delta\tau}{2}$$

$$c_i \leftarrow \frac{\Delta\tau i^2}{2} - \frac{\Delta\tau\ \alpha-\beta\ i}{4}$$

$$d_i \leftarrow -\frac{\sigma\Delta\tau i^2}{2} + \frac{\Delta\tau\ \alpha-\beta\ i}{4}$$

$$e_i \leftarrow -1 + \Delta\tau i^2 + \frac{\alpha\Delta\tau}{2}$$

$$f_i \leftarrow -\frac{\Delta\tau i^2}{2} - \frac{\Delta\tau\ \alpha-\beta\ i}{4}$$

Hitung matrik tridiagonal : M2 = diag(d(3:N),-1) + diag(e(2:N)) + diag(f(2:N-1),1))

boundval C (N, :)

aux← matrik zeros (N-1,1)

for j = 1, step 1 sampai N, do

aux [1] ←a[2]boundval [1,j]

aux [end] ← 2f(M) payoff (end)

rhs← M_2 pastval + aux

oldval← pastval

```
error← inf
    while tol← error, do
        newval(1)← max(payoff(2),oldval(1)+(ω /b(2))(rhs(1)-(b(2)oldval(1)+c(2)oldval(2))))
            for k=2sampai N-2, do
                newval(k)← max(payoff(k+1),oldval(k)+(ω /b(k+1))(rhs(k)-(a(k+1)newval(k-1)+b(k+1)oldval(k)+c(k+1))))
            end for
            newval(N-1)← max(payoff(N),oldval(N-1)+(ω /b(N))(rhs(N-1)-(a(N)newval (N-2)+b(N)oldval(N-1))))
            error←norm(newval-oldval)
            oldval←newval
    end while
    pastval ←newval
end for
newval←[boundval(1)newval pay off (end)]
j down ← x/dx
price ← newval [1,jdown+1]
```

LAMPIRAN B

```
%Program menentukan Nilai American call option dan Stock Loan
Menggunakan Metode Beda Hingga Crank Nicolson%

% Restart
clf;
clear;
clc;

tic;
% Harga saham maksimal
Xmax = 12 ;
% Interest rate
r = 0.085;
% Volatelitas
sigma = 0.34;
% Expiry date
T = 1;
Tmin = 0;
t = ((T-Tmin)*sigma^2)/2;
% Bunga pinjaman
gamma = 0.14;%untuk American call option gamma=0
% Dividen
delta = 0.02;
% Parameter overrelaxation
omega=1.5;
% Toleransi
tol=0.001;

% Pembagian grid harga saham
N = 744;
% Banyaknya grid waktu dalam tau
M = N;

% Range waktu dalam tau
t_min = 0;t_max = t;

% Range harga saham
X_min = 0;X_max = Xmax;

% increment tau
dt = (t_max - t_min) / M;
% increment X
dX = (X_max - X_min) /N;

% Penentuan grid
% Arah tau
t = t_min : dt : t_max;
% Arah X
X = X_min : dX : X_max;

vetj = 0:N;
veti = 0:M;

% Kondisi batas
C = zeros(N+1,M+1)';
```

```
C(:,1) = max(X - 1,0);
payoff = C(:,1);
pastval = payoff(2:N,1)';
C(end,:) = 0;
boundval = C(end,:);


% Deskripsi alfa - beta
alfa=2*(r-gamma)/sigma^2;
beta=2*delta/sigma^2;

% Koefisien matriks
a = (veti.^2 * dt) / (2) - ((alfa-beta) * veti * dt) / (4);
b = -1 -(veti.^2 * dt)-(alfa * dt / 2);
c = (veti.^2) * dt / (2) + ((alfa-beta) * veti * dt) / (4);
d = -a;
e = -1 +(veti.^2 * dt) + (alfa * dt / 2);
f = -c;

% Sistem matriks
M2 = sparse(diag(d(3:N),-1) + diag(e(2:N)) + diag(f(2:N-1),1));

%Successive overrelaxation
%Menentukan nilai stock loan
aux = zeros(N-1,1);
for j=1:1:M;
    aux(1) = a(2)*(boundval(1,j)+boundval(1,j+1));
    aux(end) = 2*f(M)*(payoff(end));
    rhs = M2*pastval'+aux;
    oldval = pastval;
    error = REALMAX;
    while tol < error
        newval(1) = max(payoff(2),...
            oldval(1)+(omega/b(2))*(...
            rhs(1)-(b(2)*oldval(1)+ c(2)*oldval(2))));

        for k=2:N-2
        newval(k) = max(payoff(k+1),...
            oldval(k)+ (omega/b(k+1))*(...
            rhs(k)-(a(k+1)*newval(k-1))-...
            (b(k+1)*oldval(k)+c(k+1)*oldval(k+1))));
        end
        newval(N-1) = max(payoff(N),...
            oldval(N-1)+ (omega/b(N))*(...
            rhs(N-1)-(a(N)*newval(N-2))-...
            (b(N)*oldval(N-1))));
        error = norm(newval-oldval);
        oldval = newval;
  end
    pastval=newval;

end
boundval(1)
newval
payoff(end)
newval = [boundval(1) newval payoff(end)]
```

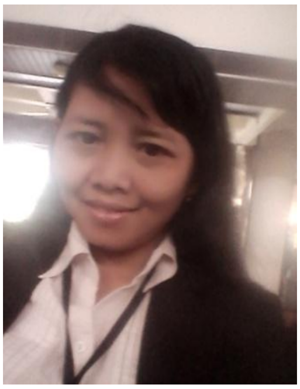
```
jdown = floor(X/dX);%jdown pembulatan X

% if jdown == jup
    price = newval(1,jdown+1);
% else
%      price = newval(1,jdown+1)+...
%           (X-jdown*dX)*(newval(1,jup+1)-newval(1,jup+1))'/dX;
%  end

XP=zeros(N+1,2);
XP=[X' price'];

%menentukan optimal exit price
 hh=length(price);
 h = hh;
 while payoff(h)>=price(h);
     h=h-1;
     if h==1
         break
     end
 end
 Xf = X(h+1)

%figure
plot(X,price,X,payoff);
legend('Nilai Stock Loan','Payoff');
%untuk american call option ‘Nilai Stock loan’ diganti ‘Nilai
American call option’
xlabel('Harga Saham Nondimensional X');
ylabel('Nilai');
toc;
```



Penulis tesis ini bernama Noviana Tri Utami. Lahir sebaagai anak ke tiga dari pasangan Bapak Soejatman dan Ibu Musilah (Alm) pada tanggal 02 November 1981 di Surabaya. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di TK Kuncup Kartini Surabaya (1986-1988), SDN Pacarkeling VII Surabaya (1988-1994), SMPN 30 Surabaya (1994-1997), SMAN 9 Surabaya (1997-2000). Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi jenjang S1 di jurusan Pendidikan Matematika Universitas Negeri Surabaya (2000-2005). Penulis melanjutkan pendidikan S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (ITS) pada tahun 2014. Di Jurusan Matematika ITS Penulis mengambil bidang minat matematika terapan . Informasi lebih lanjut mengenai tesisi ini bisa menghubungi penulis melalui email : echanovia8@gmail.com.